О ДВИЖЕНИИ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ НЕГОЛОНОМНЫЕ НЕИДЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ

МАНГЛИЕВА ЖУРАГУЛ ХАМРОКУЛОВНА
БЕКНАЗАРОВ ЖАСУР ХОЛМАМАТОВИЧ

PUBLISHED BY
NOVATEUR PUBLICATION
466,SADASHIVPETH,M.S.INDIA-411030

НАВОИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

О ДВИЖЕНИИ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ НЕГОЛОНОМНЫЕ НЕИДЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ

к.ф.м.н., доцент, кафедра: «Технология машиностроения»

Манглиева Журагул Хамрокуловна

Ph D., доцент, кафедра: «Технология машиностроения»

Бекназаров Жасур Холмаматович

Монография посвящена исследованию некоторых вопросов аналитической механики систем с неидеальными связями. Вопросы аналитической механики, связанные с изучением положений равновесия и движения механических систем со связями, еще со времен Лагранжа постоянно привлекают внимание исследователей. Разработка методов исследования таких систем привело к разделению теоретической механики не только на механику систем с геометрическими и кинематическими связями, но и на механику систем с идеальными и неидеальными связями.

Рецензенты: профессор НУ Уз. Коршунова Н.А

Доцент НДКИ Тошов Б.Р

Навои 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что для механических систем, на которые наложены только идеальные связи, знания активных сил при заданных начальных условиях вполне достаточно для определения движения системы и сил реакций связей. Поэтому общая теория для систем с идеальными связями (голономными и неголономными) достаточно хорошо развита

В последнее время возрос интерес к методам аналитической механики систем с неидеальными и с условными неидеальными связями (связи с трением, сервосвязи). Развитие этих методов необходимо для решения актуальных задач синтеза и анализа сложных механических систем (управляемые гироскопические системы, следящие системы, системы автоматического регулирования и управления, роботы и манипуляторы, машинные агрегаты с вариаторами и другие), решения задач аналитического построения устойчивых механических систем программного движения. В связи с этим возникла потребность в построении аналитической динамики систем с неидеальными связями (голономными и неголономными), среди которых имеются связи с трением и условные связи (сервосвязи). Многочисленные исследования в данном направлении не дают единого подхода, охватывающего широкий круг задач механики систем с неидеальными связями различного вида.

Актуальным остаётся развитие общей теории для механических систем с неидеальными связями, аналогичной той, которая существует для систем с идеальными связями. Здесь важную роль может сыграть метод комбинирования связей, введенный Пенлеве для голономных систем. Однако, непосредственное применение известных правил комбинирования связей к исследованию ряда конкретных задач затруднительно, а в некоторых случаях приводит к противоречивым выводом. В связи с этим, является важной задача такого обобщения метода комбинирования связей, при котором эти противоречия снимаются.

Расширение метода комбинирования связей путём введения специального класса возможных перемещений позволит рационально решать ряд задач синтеза и анализа динамики систем с неидеальными связями, в том числе и с условными неидеальными связями, с учетом их освобождаемости.

– Выяснить возможности применения расширенного метода комбинирования связей для составления дифференциальных уравнений движения механических систем, как с геометрическими неидеальными связями, так и с неголономными неидеальными связями.

– Получить дифференциальные уравнения движения голономных систем с неидеальными связями в виде уравнений Лагранжа второго рода и в избыточных координатах в виде уравнений М.Ф.Шульгина.

– Обобщить принцип наименьшего принуждения Гаусса для неголономных систем с неидеальными связями в случае возможных перемещений, удовлетворяющих расширенному методу комбинирования связей.

– Составить при помощи расширенного метода комбинирования связей дифференциальные уравнения движения неголономных систем с неидеальными связями.

– Исследовать движение фрикционного регулятора скорости при наличии условной связи, применяя общую теорию систем с условными неидеальными связями.

– Определить величину силового воздействия, поддерживающего постоянное значение угловой скорости приёмного вала.

– Исследовать устойчивость стационарного движения редуктора скорости в случае постановки задачи с упругой периферией промежуточного колеса.

– Решить вопрос оптимальной стабилизации движений регулятора скорости в окрестности многообразия, определяемого условной связью.

– Приложить результаты к решению конкретных задач.

ГЛАВА 1

О ДВИЖЕНИИ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЯЗИ С ТРЕНИЕМ

1.1. Расширение метода комбинирования связей на основе особого способа введения возможных перемещений

П.Пенлеве, излагая методику исследования систем с трением на конкретных примерах, сделал заключение, что сила связи не зависит от силы трения, что согласуется с его теорией. Однако, это утверждение он сделал при частных предположениях относительно инерционных свойств системы. Покажем на конкретном примере, что сила связи может не зависеть от силы трения и при произвольных инерционных свойствах системы. В этом случае метод комбинирования связей Пенлеве не дает результатов, согласующихся с его теорией. Следовательно, при рассмотрении систем с трением необходимо расширить метод комбинирования связей.

Следуя П.Пенлеве, рассмотрим задачу о движении двух материальных точек M и M_1 с массами m и m_1 соответственно, связанных жестким невесомым стержнем длины l (массы произвольны). Предполагается, что точка M движется по горизонтальной прямолинейной оси Ox, имеющей коэффициент трения f.

Система движется в вертикальной плоскости Oxy, причем ось Oy направлена вертикально вниз (рис.1.1.). Воспользуемся сначала методикой, изложенной в добавлении 1 работы.

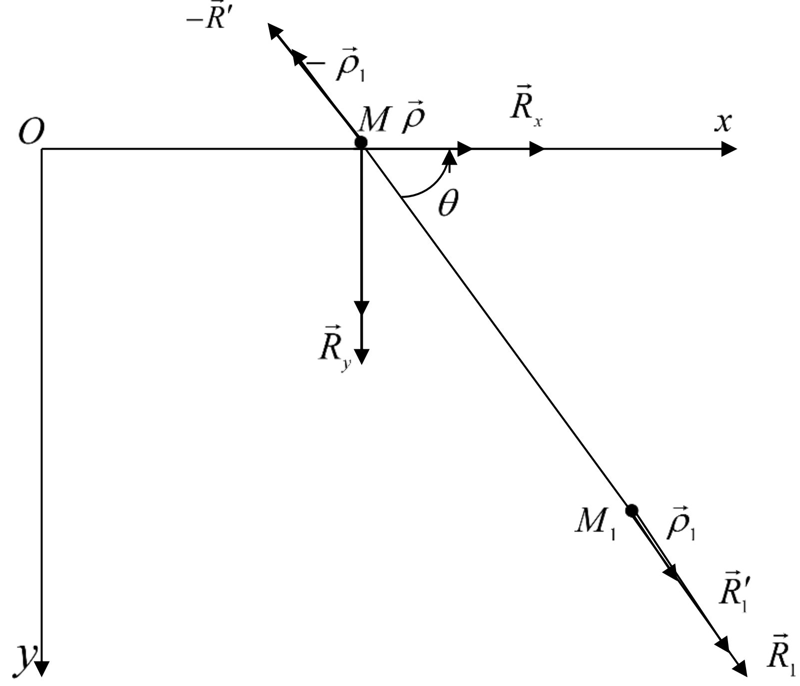

Рис.1.1. Движение двух материальных точек

Введем следующие обозначения:

$\vec{R}'(R_x', R_y')$ - сила связи для точки M;

$\vec{R}_1'(R_{1x}', R_{1y}')$ - сила связи для точки M_1;

$\vec{\rho}(\rho_x, \rho_y)$ -сила трения для точки M;

$\vec{\rho}_1(\rho_{1x}, \rho_{1y})$ -сила трения для точки M_1;

$\vec{Y}$ -сила реакции прямой ox;

$\vec{\rho}_1'$ -сила реакции стержня;

λ, λ_1 -множители Лагранжа;

$\vec{R}(R_x, R_y)$ -сила реакции связи для точки M;

$\vec{R}_1(R_{1x}, R_{1y})$ - сила реакции связи для точки M_1.

Согласно определению силы связи для точек M и M_1 будут соответственно

$$\vec{R}' = \vec{Y} - \vec{R}_1' \qquad \text{для точки } M,$$

$\vec{R}_1'$ для точки M_1,

а силы трения

$\vec{\rho} = \vec{R} - \vec{R}_1 - \vec{Y} + \vec{\rho}_1' = \vec{R} - \vec{Y} - \vec{\rho}_1$ для точки M,

$$\vec{\rho}_1 = \vec{R}_1 - \vec{R}_1' \qquad \text{для точки } M_1.$$

Составляющие сил связи и трения для точки M будут иметь следующий вид:

$R_y' = -\lambda_1 \sin\theta + \lambda$,

$$R_x' = -\lambda_1 \cos\theta, \tag{1.1}$$

$\rho_y = O$,

$\rho_x = \mu$,

а для точки M_1

$R_{1y}' = \lambda_1 \sin\theta$,

$$R_{1x}' = \lambda_1 \cos\theta, \tag{1.2}$$

$\rho_{1y} = \mu \sin\theta \cos\theta$,

$\rho_{1x} = \mu \cos^2\theta$.

Здесь μ - горизонтальная составляющая силы трения для точки M.

Дифференциальные уравнения движения системы можно записать следующим образом:

$$m\ddot{x} = \mu - \lambda_1 \cos\theta,$$

$$0 = mg + \lambda - \lambda_1 \sin\theta, \tag{1.3}$$

$$m_1\ddot{y}_1 = m_1 g + \lambda_1 \sin\theta + \mu \sin\theta \cos\theta,$$

$$m_1\ddot{x}_1 = \lambda_1 \cos\theta + \mu \cos^2\theta.$$

Присоединяя уравнения связей

$$y = 0,$$
$$(x_1 - x)^2 + y_1^2 = l^2,$$

получим замкнутую систему уравнений относительно $x, x_1, y_1, \lambda, \lambda_1$.

Принимая во внимание уравнения связей и взяв в качестве обобщенных координат x и θ, с помощью системы уравнений (1.3) получим следующее соотношение:

$$\lambda_1(1 + \frac{m_2}{m}\cos^2\theta) + m_1(g\sin\theta + \dot{\theta}^2) = \mu(\frac{m_1}{m} - 1)\cos\theta. \tag{1.4}$$

Отсюда видно, что множители Лагранжа λ и λ_1 в этом случае будут зависеть от силы трения μ, и только при частном предположении о равенстве масс из уравнения (1.4) получим

$$\lambda_1 = -\frac{\left(\dot{\theta}^2 + g\sin\theta\right)}{1 + \cos^2\theta}.$$

(1.5)

П.Пенлеве на основе формулы (1.5) делает заключение, что λ и λ_1 - величины, не зависящие от μ, как и требовала его теория, и они будут такими же, как если бы система была без трения.

Расширение метода комбинирования связей, свободного от выше упомянутого ограничения на массы, может быть дано следующим образом. В приведенном выше решении предполагалось, что перемещения $\delta\vec{r} = \vec{\rho}\delta t$ для точки M и $\delta\vec{r}_1 = \vec{\rho}_1\delta t$ для точки M_1 составляют возможные перемещения системы.

Если возможные перемещения системы образовать из перемещений $\delta\vec{r} = \dfrac{\vec{\rho}\,\delta t}{m}$ для точки M и $\delta\vec{r}_1 = \dfrac{\vec{\rho}_1\delta t}{m_1}$ для точки M_1, то силы связи и силы трения для точек M *и* M_1 будут соответственно

$$\vec{Y} - \vec{R}_1' \qquad \text{для точки } M,$$

$$\vec{R}_1' \qquad \text{для точки } M_1,$$

а силы трения

$$\vec{\rho} = \vec{R} - \vec{R}_1 - \vec{Y} + \vec{R}_1 = \vec{R} - \vec{Y} - \vec{\rho}_1 \qquad \text{для точки } M,$$

$$\vec{\rho}_1 = \vec{R}_1 - \vec{R}_1' \qquad \text{для точки } M_1$$

В этом случае, согласно теории Пенлеве, должно иметь место равенство

$$\delta\vec{r}\cdot\vec{j} = \frac{\overline{\rho}}{m}\,\vec{j}\,\delta t = 0, \qquad (1.6)$$

то есть сила трения $\vec{\rho}$ должна иметь в качестве линии действия направление оси Ox. Отсюда получим

$$R_y - Y = \rho_1 \sin\theta. \qquad (1.7)$$

Кроме того, проекции перемещений точек в направлении прямой, соединяющей эти точки равны

$$np_{MM}\,\delta\vec{r} = np_{MM_1}\delta\vec{r}_1\,. \qquad (1.8)$$

Отсюда следует

$$\frac{\rho}{m}\cos\theta = \frac{\rho_1}{m_1}$$

или

$$\rho_1 = \frac{m_1}{m}\rho\cos\theta\,.$$

Если иметь в виду соотношение для силы трения, относящееся к точке M , то из уравнения (1.8) получим

$$\frac{1}{m}\left(R_x\cos\theta + (R_y - Y)\sin\theta - \rho_1\right) = \frac{1}{m_1}\rho_1\,. \qquad (1.9)$$

Имея в виду уравнение (1.7) будем иметь

$$R_x\cos\theta + \rho_1\sin^2\theta = \left(\frac{m}{m_1} + 1\right)\rho_1, \qquad (1.10)$$

отсюда

$$R_x\cos\theta = \left(\frac{m}{m_1} + \cos^2\theta\right)\rho_1\,. \qquad (1.11)$$

Таким образом, силами трения для точек $M\,, M_1$ будут

$$\rho_1 = \frac{m_1\cos\theta}{m + m_1\cos^2\theta}R_x\,, \qquad (1.12)$$

$$\rho = \frac{mR_x}{m + m_1\cos^2\theta}\,. \qquad (1.13)$$

Если мы положим

$$\mathrm{Y} = \lambda \,, R_1' = \lambda_1 ,$$

$$\frac{R_x}{m + m_1 \cos^2 \theta} = \mu \ ,$$

то составляющие сил связи и сил трения могут быть записаны в виде:

для точки M:

$$\begin{cases} R_x' = -\lambda_1 \cos\theta, \\ R_y' = \lambda - \lambda_1 \sin\theta, \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} \rho_x = m\mu, \\ \rho_y = 0, \end{cases} \tag{1.15}$$

а для точки M_1:

$$R_{1x}' = \lambda_1 \cos\theta \,, \tag{1.16}$$

$$R_{1y}' = \lambda_1 \sin \theta,$$

$$\rho_{1x} = m_1 \mu \cos^2 \theta, \tag{1.17}$$

$$\rho_{1y} = m_1 \mu \cos\theta \sin \theta.$$

Тогда движение системы определяется уравнениями:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\lambda_1 \cos\theta + m\mu, \\ m\ddot{y} = \lambda - \lambda_1 \sin\theta + mg, \\ m_1 \ddot{x}_1 = \lambda_1 \cos\theta + m_1 \cos^2 \theta\mu, \\ m_1 \ddot{y}_1 = \lambda_1 \sin\theta + m_1 \mu \cos\theta \sin\theta + m_1 g. \end{cases} \tag{1.18}$$

Присоединяя к (1.18) уравнения связей

$$y = 0 \,, \tag{1.19}$$

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - l^2 = 0,$$

получим замкнутую систему уравнений относительно $x, y, x_1, y_1, \lambda, \lambda_1$.

Что касается экспериментального закона трения, то последнее выражает, что μ имеет знак, противоположный $\dot{x}$, и удовлетворяет равенству

$$|R_x| = f|R_y|. \tag{1.20}$$

В явном виде соотношение (1.20) сводится к следующему

$$\left|\mu(m + m_1 \cos^2\theta)\right| = f\left|\lambda + m_1 \sin\theta\cos\theta\mu\right|, \tag{1.21}$$

или

$$\mu = \frac{-f\lambda}{m_1\cos^2\theta + m_1\sin\theta\cos\theta\cdot f + m} \quad \text{если}\, \dot{x} > 0, \tag{1.22}$$

$$\mu = \frac{f\lambda}{m_1\cos^2\theta - m_1\sin\theta\cos\theta\cdot f + m} \quad \text{если}\, \dot{x} < 0. \tag{1.23}$$

Чтобы исключить множители Лагранжа, воспользуемся уравнениями связей (1.19), используя при этом зависимость между координатами и углом θ

$$\begin{cases} x_1 = x + l\cos\theta, \\ y = l\sin\theta. \end{cases} \tag{1.24}$$

Из второго уравнения системы (1.18) получим

$$\lambda - \lambda_1 \sin\theta + mg = 0. \tag{1.25}$$

Чтобы исключить из уравнений движений λ_1, продифференцируем по времени второе уравнение (1.19)

$$(x_1 - x)(\ddot{x}_1 - \ddot{x}) + (y_1 - y)(\ddot{y}_1 - \ddot{y}) + (\dot{x}_1 - \dot{x})^2 + (\dot{y}_1 - \dot{y})^2 = 0.$$

Подставим в это соотношение вторые производные переменных x, y, x_1, y_1

$$l\cos\theta\left(\frac{\lambda_1}{m_1}\cos\theta+\mu\cos^2\theta+\frac{\lambda_1}{m}\cos\theta-\mu\right)+l\sin\theta\left(\frac{\lambda_1}{m_1}\sin\theta+\mu\sin\theta\cos\theta+g\right)+$$
$$+l^2\cos^2\theta\dot\theta^2+l^2\sin^2\theta\dot\theta^2=0$$

или

$$\frac{l}{m_1}\lambda_1+\frac{l\cos^2\theta}{m}\lambda_1-l\mu\cos\theta\sin^2\theta+l\sin^2\theta\cos\theta\mu+l\sin\theta g+l^2\dot\theta^2=0.$$

После элементарных сокращений получим:

$$l\lambda_1\left(\frac{1}{m_1}+\frac{\cos^2\theta}{m}\right)+l\sin\theta g+l^2\dot\theta^2=0. \tag{1.26}$$

Разрешая уравнения (1.25) и (1.26) относительно λ,λ_1, будем иметь

$$\lambda_1=-\frac{(l\dot\theta^2+g\sin\theta)mm_1}{m+m_1\cos^2\theta}, \tag{1.27}$$

$$\lambda=-mg-\frac{(l\dot\theta^2+g\sin\theta)mm_1}{m+m_1\cos^2\theta}\sin\theta\ . \tag{1.28}$$

Отсюда видно, что если в качестве возможных перемещений для точек M, M_1 взять $\delta\vec r=\dfrac{\vec\rho\delta t}{m}$ и $\delta\vec r_1=\dfrac{\vec\rho_1\delta t}{m_1}$ соответственно, то Лагранжевы множители не зависят от μ, что согласуется с теорией Пенлеве.

Подставляя λ,λ_1 и μ в уравнения (1.18) и имея в виду (1.24), получим следующую систему уравнений движения:

$$\begin{aligned}(m_1\cos^2\theta-\varepsilon f m_1\sin\theta\cos\theta+m)\ddot x=\frac{m_1(l\dot\theta^2+g\sin\vartheta)}{m+m_1\cos^2\vartheta}((m_1\cos^2\theta-\\-\varepsilon f m_1\sin\theta\cos\theta+m)\cos\theta+m_1\varepsilon f\sin\theta)-m\varepsilon f g\ ,\end{aligned} \tag{1.29}$$

$$l\ddot\theta-\ddot x\sin\theta=-g\cos\theta$$

где $\varepsilon=1,\ \textit{если}\ \ \dot x<0\ \ \textit{и}\ \ \varepsilon=-1,\ \textit{если}\ \ \dot x>0.$

В предыдущих рассуждениях мы оставляли в стороне случай трения покоя, иными словами, случай, когда $\dot{x}=0$. Случай, который соответствует трению покоя или началу движения рассмотрим подробно в общих примерах в дальнейшем.

Так как теперь известен закон трения системы, то появилась возможность составить уравнения движения в виде уравнений Лагранжа II рода. Требуется определить движение системы, если на нее действует сила тяжести, а сама она подчинена связям

$$\begin{aligned} &y=0,\\ &(x_1-x)^2+y_1^2=l^2. \end{aligned} \tag{1.30}$$

В качестве обобщенных координат примем координаты точки M и угол θ. Для координат точки M_1 имеем соотношения

$$\begin{aligned} &x_1=x+l\cos\theta,\\ &y_1=l\sin\theta, \end{aligned} \tag{1.31}$$

тождественно удовлетворяющие уравнениям связей (1.30). Введем обобщенные координаты x и θ.

Вычислим кинетическую энергию системы

$$\begin{aligned} &T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)=\\ &\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_1\left[\left(\dot{x}-l\sin\theta\dot{\theta}\right)^2+l^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2\right]=\\ &=\frac{1}{2}(m_1+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}^2-m_1l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Найдем элементарную работу сил тяжести и сил трения на возможных перемещениях

$$\delta A=m_1g\delta y_1=m_1gl\cos\theta\delta\theta$$

$$\delta A_x = \rho_x \delta x + \rho_{1x} \delta x_1 + \rho_{1y} \delta y_1 = m\mu \delta x + m_1 \mu \cos^2 \theta \delta x_1 +$$
$$m_1 \mu \sin\theta \cos\theta \delta y_1 = \mu(m + m_1 \cos^2 \theta) \delta x,$$

откуда имеем

$$Q_\theta = m_1 g l \cos\theta , \tag{1.33}$$

$$Q_x^\tau = \mu(m + m_1 \cos^2 \theta).$$

Вычисляя выражения

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m + m_1)\dot{x} - m_1 l \dot{\theta} \sin\theta ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

из

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x^\tau , \tag{1.34}$$

получим уравнение

$$(m + m_1)\ddot{x} - m_1 l \ddot{\theta} \sin\theta - m_1 l \dot{\theta}^2 \cos\theta = \mu(m + m_1 \cos^2 \theta) \ . \tag{1.35}$$

Далее будем иметь выражения

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m_1 l^2 \dot{\theta} - m_1 l \dot{x} \sin\theta \ ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -m_1 l \dot{x} \dot{\theta} \cos\theta \ , \tag{1.36}$$

позволяющие из

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = mg \cos\theta \cdot l,$$

получить уравнение

$$l\ddot{\theta} - \ddot{x}\sin\theta = g\cos\theta. \tag{1.37}$$

Для определения движения к системе уравнений (1.35) и (1.37) следует присоединить закон изменения μ. Он может быть выражен через закон Кулона, который приведен выше.

Эти же уравнения можно получить с помощью последовательного применения принципа освобождаемости от связей, то есть, пользуясь соотношениями

$$x_1 = x + l\cos\theta,$$

$$y_1 = y + l\sin\theta,$$

тождественно удовлетворяющими второму уравнению системы связей.

Введем обобщенные координаты x, y, θ. Кинетическая энергия системы при этом будет следующей:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) = \\ &= \frac{1}{2}(m + m_1)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m + m_1)\dot{y}^2 + \\ &+ \frac{1}{2}m_1 l\dot{\theta}\left(l\dot{\theta} + 2\dot{y}\,cos\theta - 2\dot{x}\sin\theta\right). \end{aligned}$$

Элементарная работа сил на возможных перемещениях определяется равенствами

$$\delta A = mg\delta y + m_1 g\delta y_1 = \left(m + m_1\right)g\delta y + m_1 gl\cos\theta\delta\theta$$

$$\delta A^\tau = R_x\delta x + R_y\delta y,$$

откуда

$Q_x = 0,$

$$Q_y = \left(m + m_1\right) g \quad ,$$

$$Q_\theta = m_1 g l \cos\theta ,$$

$$Q_x^\tau = R_x ,\ Q_y^n = R_y .$$

Составляя уравнения Лагранжа II рода

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = R_x,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = R_y + \left(m + m_1\right) g,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = m_1 g l \cos\theta,
\end{aligned}$$

получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\left(m + m_1\right)\ddot{x} - m_1 l(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = R_x,\\
&\left(m + m_1\right)\ddot{y} + m_1 l(\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta) = \left(m + m_1\right) g + R_y,\\
&l\ddot{\theta} + \ddot{y}\cos\theta - \ddot{x}\sin\theta = g\cos\theta.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

При составлении этих уравнений не была учтена первая связь системы (1.30). Если учесть эту связь, то получим

$$\begin{aligned}
&\left(m + m_1\right)\ddot{x} - m_1 l(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = R_x,\\
&m_1 l(\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta) = \left(m + m_1\right) g + R_y,\\
&l\ddot{\theta} - \ddot{x}\sin\theta = g\cos\theta.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

В этих уравнениях R_x и R_y представляют собой компоненты реакции прямой Ox, связь между которыми устанавливается экспериментально

$$R_x = f R_y sign(\dot{x}),$$

где

$$sign\ \dot{x} = \begin{cases} +1, & \dot{x} < 0 \\ -1, & \dot{x} > 0 \end{cases} \tag{1.40}$$

Следует заметить, что если вместо угла θ ввести угол φ, отсчитываемый от оси Oy, то $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, и уравнения движения в этом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[(m+m_1)\dot{x} - m_1 l\dot{\varphi}\cos\varphi\right] = \\ &= f\left[(m+m_1)g + m_1 l\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + m_1 l\sin\varphi\dot{\varphi}^2\right] sign\,\dot{x}\,, \end{aligned} \tag{1.41}$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0.$$

Они имеют такой же вид, как и в задаче о движении эллиптического маятника с учетом силы трения скольжения ползуна, когда коэффициент трения равен f.

Заметим, что если пользоваться законом трения системы, то следует в уравнениях (1.39) положить

$$R_x = \mu\left[m + m_1\cos^2\theta\right],$$

$$R_y = m_1\mu\sin\theta\cos\theta + \lambda, \tag{1.42}$$

что позволяет определить закон изменения величины μ.

Надо отметить, что если геометрическая связь $y = 0$ односторонняя, то полученные уравнения движения имеют место только в случае, когда $R_y > 0$, в противном случае система освобождается от связи и уравнения движения будут иметь другой вид.

Таким образом, рассмотренная задача показывает, что существует необходимость при исследовании систем с геометрическими неидеальными связями использовать расширенный метод комбинирования связей.

1.2. Дифференциальные уравнения движения систем с геометрическими неидеальными связями при использовании расширенного метода комбинирования связей

Рассмотрим механическую систему материальных точек $M_k\ (k = 1,2,...,N)$, положение которых в инерциальной системе отсчета определяется их декартовыми координатами $x_\gamma\ (\gamma = 1,2,...,3N)$. Пусть на точки системы действуют заданные силы $\vec{F}_k(X_\gamma)$, а движение их ограничено совместными и независимыми связями

$$f_\alpha(x_\gamma, t) = 0 \qquad (f_\alpha \subset C_2, \alpha = 1,...,a) \tag{1.43}$$

Введем стандартные обозначения [22]. Через x_1, x_2, x_3, $m_1 = m_2 = m_3$ обозначены координаты и масса первой точки системы, через x_4, x_5, x_6 и $m_4 = m_5 = m_6$ - масса и координаты второй точки, X_1, X_2, X_3- компоненты силы, действующей на первую точку и т.д.

Возможные перемещения системы, допускаемые связями, определяются a соотношениями

$$\sum_{\gamma=1}^{3N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma} \delta x_\gamma = 0 \qquad (\alpha = 1,...,a.) \tag{1.44}$$

а многообразие допустимых конфигурацией системы представим в виде:

$$x_\gamma = a_\gamma(q_i, t) \quad (a \ \in C\ ), \tag{1.45}$$

где q_i $(i=1,...,3N-a)$ – независимые Лагранжевы координаты.

Вариации декартовых координат можно выразить через произвольные величины δq_i следующим образом

$$\delta x_\gamma = \sum_{i=1}^{3N-a} \frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i} \delta q_i \qquad (\gamma = 1,2,...,3N). \tag{1.46}$$

Обозначим через $\bar{R}_k$ результирующие реакции, действующие на точки $M_к$

.

Если связи, наложенные на механическую систему являются идеальными, то на основании аксиомы идеальности связей имеем равенство

$$\sum_{\gamma=1}^{3N} R_\gamma \delta x_\gamma = 0 , \tag{1.47}$$

справедливое для любых возможных перемещений системы. Необходимым и достаточным условием выполнения этого условия является выполнение соотношения

$$R_\gamma = \sum_{\alpha=1}^{a} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma}, \tag{1.48}$$

где λ_α - неопределенные множители Лагранжа.

Предположим, что система стеснена связями с трением. В этом случае, как известно [46], сумма элементарных работ сил реакций на любом возможном перемещении не равна нулю

$$\sum_{\gamma=1}^{3N} R_\gamma \delta x_\gamma \neq 0 \tag{1.49}$$

В этом случае на основании теории, разработанной П.Пенлеве, силы реакций связей $\overline{R}_к$ можно единственным образом разложить на составляющие $\overline{R}_к^{\,n}$ и $\vec{R}_к^{\tau}$, такие, что обе системы сил удовлетворяют следующим утверждениям:

1. На всяком возможном перемещении системы δx_γ выполняется

$$\sum_{\gamma=1}^{3N} R_\gamma^n \, \delta x_\gamma = 0. \qquad (1.50)$$

2. Векторы $\dfrac{\vec{R}_k^{\tau}}{m_k}\delta t$ находятся среди возможных перемещений, причем

$$\sum_{\gamma=1}^{3N} R^{\tau}{}_{\gamma} \delta x_\gamma \neq 0 \,. \qquad (1.51)$$

Силу $\overline{R}_k^{\,n}$ назовем силой связи, а силу $\overline{R}_k^{\,\tau}$ - силой трения.

При этом

$$R_\gamma^n = \sum_{\alpha=1}^{a} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma} \,,$$

$$R_\gamma^\tau = \sum_{i=1}^{3N-a} \mu_i \frac{\partial (m_\gamma x_\gamma)}{\partial q_i} \,, \qquad (1.52)$$

где μ_i - некоторые коэффициенты пропорциональности.

Движение системы будет описываться дифференциальными уравнениями

$$m_\gamma \ddot{x}_\gamma = X_\gamma + \sum_{\alpha=1}^{a} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_\gamma} + R_\gamma^\tau \qquad (\gamma = 1, 2, ..., 3N). \qquad (1.53)$$

Присоединяя уравнения связей

$$f_\alpha (x_\gamma, t) = 0 \qquad (f_\alpha \subset C_2, \alpha = 1, ..., a), \qquad (1.54)$$

получим замкнутую систему уравнений относительно x_γ, λ_α.

Для исключения множителей Лагранжа продифференцируем по времени уравнения (1.43) два раза и, подставляя вместо $\ddot{x}_\gamma$ их значения из (1.53), получим систему a линейных уравнений, позволяющих определить множители λ_α в функциях времени, координат и скоростей точек системы, а также заданных сил X_γ. Уравнения (1.53) совместно с уравнениями (1.54) носят названия уравнения Лагранжа первого рода для систем с неидеальными связями.

Умножим каждое из уравнений (1.54) на δx_γ и сложим их. Так как система является голономной, то вводя вместо декартовых координат обобщенные координаты $q_1,...,q_{3N-a}$, кинетическую энергию системы T и соответствующие обобщенные силы, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{3N-a}[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i-Q_i^\tau]\delta q_i=0\,, \tag{1.55}$$

где

$T=\frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{3N}m_\gamma \dot{x}_\gamma^2$ -кинетическая энергия системы;

$Q_i=\sum_{\gamma=1}^{3N}X_\gamma\frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i}$ - обобщенные силы, соответствующие активным силам;

$Q_i^\tau=\sum_{\gamma=1}^{3N}\mu_i\frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i}$ - обобщенные силы, соответствующие силам трения.

Учитывая независимость величин δq_i, из (1.55) получим систему уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i+Q_i^\tau\ . \tag{1.56}$$

Видим, что в случае систем с трением для определения движения, помимо заданных сил, необходимо знать также силы трения или, по крайней мере, сумму элементарных работ реакций на возможных перемещениях.

Известно, что силы трения определяются из закона трения. Поэтому при исследовании движения систем с трением нужно считать известными, вообще говоря, выражения для коэффициентов μ_i в виде функций времени, координат и скоростей, причем эти функции находятся эмпирически. Надо отметить, что хотя по виду уравнений (1.56) составление уравнений движения систем с трением кажется довольно простым, но аналитически определение закона трения системы достаточно трудоемко, в чем мы убедились на простом примере П.Пенлеве в параграфе 1.1.

Из вышесказанного следует, что если коэффициенты μ_i определены как функции от λ_α, то говорят, что закон трения системы известен.

Таким образом, сообщая системе произвольные возможные перемещения, в силу условий (1.50), общее уравнение динамики для систем с трением можно записать в виде

$$\sum_{\gamma=1}^{3N}(X_\gamma + R_\gamma^\tau - m_\gamma \ddot{x}_\gamma)\delta x_\gamma = 0. \qquad (1.57)$$

Не приводя простые аналитические выкладки с уверенностью можно распространить все сказанное выше и на другие виды уравнений движения для систем стесненных неидеальными геометрическими связями, например, на уравнения в избыточных координатах М.Ф.Шульгина [87].

Рассмотрим движение механической системы из N материальных точек под действием заданных сил, стесненной совместными и независимыми геометрическими связями

$$f_\alpha(x_1, x_2, x_3, \ldots x_{3N}, t) = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,a). \qquad (1.58)$$

Предположим, что в момент t каждая точка $M_к$ системы имеет определенное положение и определенную скорость, и пусть $\vec{R}_к$ будет реакция, которая действует на точку $M_к$ в момент t.

Пусть для всякого возможного перемещения полная работа реакций связей отлична от нуля

$$\sum_{к=1}^{N} \vec{R}_к \delta \vec{r}_к \neq 0. \tag{1.59}$$

На основании теории Пенлеве [60] составляющие сил реакций и силы трения можно представить в виде

$$R_\gamma^n = \sum_{\alpha=1}^{a} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_{\gamma_i}}, R_\gamma^\tau = \sum_{m=1}^{3N-a} \mu_m \frac{\partial (m_\gamma \dot{x}_\gamma)}{\partial p_m}, \tag{1.60}$$

где λ_α - множители Лагранжа, p_m -независимые скоростные параметры, μ_m -функции от $\lambda_1, \lambda_{2,}..., \lambda_a$ и $x_1, x_2, ..., x_{3N,}$ $p_1, p_2, ... p_{3N-a}$, которые определяются эмпирически для данной системы. Надо напомнить, что если в момент времени t известны положения и скорости точек системы, а также действующие на эти точки заданные силы $\vec{F}_k$, то силы связей R_k^n определяются и будут одними и теми же независимо от того, обладает данная система трением или нет.

Как известно [22], уравнения (1.43) дают возможность выразить скорости $\dot{x}_1, \dot{x}_2, ... \dot{x}_a$ и вариации $\delta x_1, \delta x_2, ... \delta x_a$ через остальные независимые скорости и вариации $\dot{x}_j, \delta x_j$ в виде

$$\dot{x}_\alpha = \sum_{j=a+1}^{3N} A_{\alpha j} \dot{x}_j \qquad (\alpha = 1,2,...,a), \tag{1.61}$$

$$\delta x_\alpha = \sum_{j=a+1}^{3N} A_{\alpha j} \delta x_j \qquad (\alpha = 1,2,...,a).$$

Для получения уравнений движения системы в избыточных координатах применим общее уравнение динамики, которое имеет вид

$$\sum_{k=1}^{N}(m_k\vec{w}_k-\vec{F}_k-\vec{R}_k^{\tau})\delta\vec{r}_k=0. \qquad (1.62)$$

Преобразовав это уравнение с помощью уравнений (1.61), т.е. исключая зависимые скорости $\dot{x}_q$ и вариации δx_q, получим следующее соотношение:

$$\sum_{j=a+1}^{3N}(\frac{d}{dt}(\frac{\partial T^*}{\partial\dot{x}_j})-E_j(T^*)-X_j-\sum_{\alpha=1}^{a}A_{\alpha j}X_\alpha-R_j^{\tau}-\sum_{\alpha=1}^{a}A_{\alpha j}R_\alpha^{\tau})\delta x_j=0, \qquad (1.63)$$

где T^* - кинетическая энергия системы, преобразованная с учетом (1.61), то есть зависимые скорости исключены;

$$E_j(T^*)=\frac{\partial T^*}{\partial x_j}+\sum_{\alpha=1}^{a}A_{\alpha j}\frac{\partial T^*}{\partial x_\alpha}.$$

$E_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}+\sum\limits_{\alpha=1}^{a}A_{\alpha j}\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}$ -оператор М.Ф.Шульгина [87]).

Так как вариации δx_j взаимно независимы и произвольны, то из этого уравнения следует, что коэффициенты при них равны нулю

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T^*}{\partial\dot{x}_j})-E_j(T^*)=X_j+\sum_{\alpha=1}^{a}A_{\alpha j}X_\alpha+R_j^{\tau}+\sum_{\alpha=1}^{a}A_{\alpha j}R^{\tau}{}_\alpha, (\qquad (1.64)$$

$$(j=a+1, a+2,....3N).$$

Система уравнений (1.64) представляет собой уравнения М.Ф.Шульгина [87], или дифференциальные уравнения движения в избыточных координатах, то есть из уравнений движения исключены зависимые скорости согласно уравнениям связей, а зависимые координаты сохраняются.

Следует отметить, что для систем с неидеальными связями также имеют место уравнения П.Аппеля [22]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial S'}{\partial \dot{p}_j} = Q'_j + (R_j^\tau)', \\
&Q'_j = \sum_{\gamma=1}^{3N} X_\gamma \frac{\partial \dot{x}'_\gamma}{\partial p_l}, \qquad (R_j^\tau)' = \sum_{\gamma=1}^{3N} R_\gamma^\tau \frac{\partial \dot{x}'_\gamma}{\partial p_j}, \ \ (j = a+1,...3N),
\end{aligned}
\tag{1.65}
$$

где S' – энергия ускорений, составленная с учетом уравнений связей.

Уравнения (1.65) являются достаточно универсальными по отношению к другим видам уравнений. Как известно, уравнения Аппеля имеют место и для неголономных систем, также дают возможность получить уравнения движения системы в квазикоординатах [87].

1.3. Приложение расширенного метода комбинирования связей к конкретным системам с трением

Задача 1. Две материальные точки M_1 и M_2 с массами m_1, m_2 соединены стержнем неизменной длины l с пренебрежимо малой массой. Материальная точка M_1 движется по горизонтальной кривой с коэффициентом трения, равным f, лежащей в вертикальной плоскости, под действием силы, направленной по касательной к траектории. Система может двигаться только в вертикальной плоскости и только так, что скорость середины стержня направлена вдоль стержня (рис. 1.2.) [72].

В отличие от задачи, рассмотренной в параграфе 1.1., на систему накладывается дополнительная связь, требующая, чтобы скорость середины стержня имела направление вдоль стержня. Требуется составить уравнения движения системы .

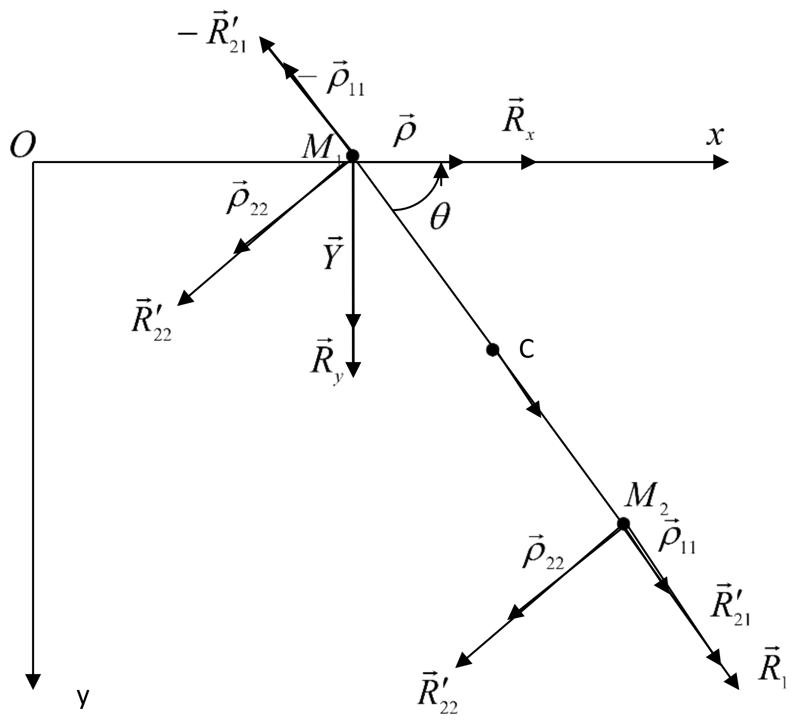

Рис.1.2. Движение точек при наличии условной связи.

Уравнениями связей для данной системы являются следующие

$$f_1 = y_1 = 0,$$

$$f_2 = \frac{1}{2}((y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 - l^2) = 0, \tag{1.66}$$

$$f_3 = (x_2 - x_1)(\dot{y}_2 + \dot{y}_1) - (y_2 - y_1)(\dot{x}_2 + \dot{x}_1) = 0. \tag{1.67}$$

Следуя методике параграфа 1.2., определим закон трения системы. Для этого сначала введем силы связей

для точки M_2: $\vec{R}'_{21} + \vec{R}'_{22}$ (положительное направление от M_1 к M_2),

а для точки M_1: $\vec{Y} - \vec{R}'_{21} + \vec{R}'_{22}$.

Силами трения будут:

для точки $M_2: \vec{R}_{21} - \vec{R}'_{21} + \vec{R}_{22} - \vec{R}'_{22} = \vec{\rho}_{21} + \vec{\rho}_{22} \Rightarrow \vec{\rho}_2 = \vec{\rho}_{21} + \vec{\rho}_{22}$, (1.68)

а для точки M_1: $\vec{\rho}_1 = \vec{R} - \vec{Y} - \vec{\rho}_{21} + \vec{\rho}_{22}$,

где $\vec{R}'_{21}$ - сила связи (1.66), направленная вдоль стержня, при этом считается, что положительное направление от M_1 к M_2;

$\vec{R}'_{22}$ - сила связи (1.67), направленная перпендикулярно стержню;

$\vec{Y}$ - сила связи (1.66), направленная перпендикулярно к оси Ox;

$\vec{R}, \vec{R}_{21}, \vec{R}_{22}$ - силы реакций связей;

$\vec{\rho}_1$, $\vec{\rho}_{21}$, $\vec{\rho}_{22}$ -силы трения.

Следуя теории, изложенной в 1.2., возможные перемещения системы выберем следующим образом: $\vec{\rho}_1 \delta t / m_1 = \delta \vec{r}_1$ для точки M_1, а $\vec{\rho}_2 \delta t / m_2 = \delta \vec{r}_2$ для точки M_2. Тогда, очевидно, $\delta \vec{r}_1$ будет иметь направление по оси Ox.

Поэтому

$$\vec{\rho}_1 \cdot \delta t \cdot \vec{j} = 0,$$

или, проектируя, имеем

$$R_y - Y = \rho_{21} \sin\theta + \rho_{22} \cos\theta, \tag{1.69}$$

где $\theta -$угол между осью Ox и $M_1 M_3$ (рис. 1.2).

Если иметь в виду уравнение связи (1.66), то, проекции возможных перемещений $\delta \vec{r}_1$, $\delta \vec{r}_2$ в направлении $M_1 M_2$ равны, отсюда имеем:

$$\frac{1}{m_1} np_{M_1 M_2} \vec{\rho}_1 = \frac{1}{m_2} np_{M_1 M_2} \vec{\rho}_2 \ ,$$

откуда

$$\frac{1}{m_1}(R_x\cos\theta+(R_y-Y)\sin\theta-\rho_{21})=\frac{1}{m_2}\rho_{21}, \qquad (1.70)$$

или

$$\frac{1}{m_1}\rho_1\cos\theta=\frac{1}{m_2}\rho_2. \qquad (1.71)$$

В силу уравнений связей (1.67) сумма проекций возможных перемещений точек в направлении, перпендикулярном M_1M_2, также равны.

Отсюда получим

$$np_s(\frac{1}{m_1}\vec{\rho}_1+\frac{1}{m_2}\vec{\rho}_2)=0,$$

$$\frac{1}{m_1}(R_x\sin\theta-(R_y-Y)\cos\theta-\rho_{22})-\frac{1}{m_2}\rho_{22}=0. \qquad (1.72)$$

После простых преобразований уравнения (1.70) и (1.72) примут вид

$$R_x\cos\theta=(\frac{m_1}{m_2}+\cos^2\theta)\rho_{21}+\rho_{22}\cos\vartheta\sin\theta), \qquad (1.73)$$

$$R_x\sin\theta=(\frac{m_1}{m_2}+\sin^2\theta)\rho_{22}+\rho_{21}\sin\theta\cos\theta. \qquad (1.74)$$

Исключая из этих уравнений R_x, получим

$$\rho_{22}=tg\theta\,\rho_{21}. \qquad (1.75)$$

Таким образом, для составляющих сил трения $\rho_1,\rho_{21}\,u\,\rho_{22}$ будем иметь

$$\rho_{21}=\frac{m_2R_\tau\cos\theta}{m_1+m_2}, \qquad (1.76)$$

$$\rho_{22}=\frac{m_2R_\tau\sin\theta}{m_1+m_2}, \qquad (1.77)$$

$$\rho_1 = \frac{m_1 R_\tau}{m_1 + m_2}. \tag{1.78}$$

Вводя стандартные обозначения

$$Y = \lambda,$$

$$R'_{21} = \lambda_1,$$

$$R'_{22} = \lambda_2,$$

$$\mu = \frac{R_x}{m_1 + m_2},$$

перепишем составляющие сил трения в следующем виде:

для точки M_1

$$\rho_{1x} = m_1 \mu, \tag{1.79}$$

$$\rho_{1y} = 0,$$

а для точки M_2

$$\rho_{2x} = \rho_{21} \cos\theta - \rho_{22} \sin\theta,$$

$$\rho_{2y} = \rho_{21} \sin\theta + \rho_{22} \cos\theta,$$

или с учетом соотношения (1.75) будем иметь

$$\rho_{2x} = m_2 \mu \cos 2\theta,$$

$$\rho_{2y} = m_2 \mu \sin 2\theta. \tag{1.80}$$

Соответственно силы связей для точек M_1, M_2 можно записать в следующем виде

$$R'_{1x} = \lambda - \lambda_1 \cos\theta - \lambda_2 \sin\theta,$$

$R'_{1y} = -\lambda_1 \sin\theta - \lambda_2 \cos\theta$,

$R'_{2x} = \lambda_1 \cos\theta - \lambda_2 \sin\theta$,

$R'_{2y} = \lambda_1 \cos\theta + \lambda_2 \sin\theta$.

Что касается закона Кулона, связывающего R_x и R_y, то эту зависимость записываем в виде соотношения $|R_x| = f\,|R_y|$ (направление противоположно скорости точки M_1).

Имея в виду уравнение (1.72), получим

$$\mu = \frac{\varepsilon\lambda}{m_1 + m_2} \quad (\varepsilon = \pm 1), \tag{1.81}$$

где значение ε подбирается в зависимости от направления скорости точки M_1, то есть распадается на два случая

$$\mu = -\frac{f\lambda}{m_1 + m_2} \qquad (\dot{x}_1 > 0),$$

$$\mu = \frac{f\lambda}{m_1 + m_2} \qquad (\dot{x}_1 < 0). \tag{1.82}$$

Таким образом, уравнения движения системы имеют вид:

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= -\lambda_1 \cos\theta - \lambda_2 \sin\theta + m_1\mu + X, \\
m_1\ddot{y}_1 &= m_1 g - \lambda_1 \sin\theta + \lambda_2 \cos\theta + \lambda, \\
m_2\ddot{x}_2 &= \lambda_1 \cos\theta - \lambda_2 \sin\theta + m_2\mu\cos 2\theta, \\
m_2\ddot{y}_2 &= m_2 g + \lambda_1 \sin\theta + \lambda_2 \cos\theta + m_2\mu\sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{1.83}$$

Присоединяя уравнения связей

$y_1 = 0$,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2 \ , \tag{1.84}$$

$$(x_2 - x_1)(\dot y_2 + \dot y_1) - (y_2 - y_1)(\dot x_2 + \dot x_1) = 0\,,$$

получим замкнутую систему уравнений относительно $x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda$.

Для нахождения множителей $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ продифференцируем по времени уравнения связей два раза и вместо вторых производных декартовых координат x_1, y_1, x_2, y_2 воспользуемся уравнениями движения системы

$$\begin{cases} \ddot y_1 = 0, \\ (x_2 - x_1)(\ddot x_2 - \ddot x_1) + (\ddot y_2 - \ddot y_1)(y_2 - y_1) + (\dot x_2 - \dot x_1)^2 + (\dot y_2 - \dot y_1)^2 = 0, \\ (x_2 - x_1)(\ddot y_2 + \ddot y_1) - (y_2 - y_1)(\ddot x_2 + \ddot x_1) - 2\dot x_1 \dot y_2 + 2\dot x_2 \dot y_1 = 0. \end{cases} \tag{1.85}$$

После подстановки получим:

$$\begin{cases} m_1 g - \lambda_1 \sin\theta + \lambda_2 \cos\theta + \lambda = 0, \\ (\dfrac{1}{m_2} + \dfrac{1}{m_1}\cos^2\theta)\lambda_1 + \dfrac{1}{m_1}\lambda_2 \sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{m_1} X\cos\theta - (l\dot\theta^2 + g\sin\theta), \\ \dfrac{1}{m_1}\cos\theta\sin\theta\,\lambda_1 + (\dfrac{1}{m_2} + \dfrac{1}{m_1}\sin^2\theta)\lambda_2 = \dfrac{1}{m_1} X\sin\theta + (2\dot x_1\dot\theta - g)\cos\theta = 0. \end{cases} \tag{1.86}$$

Разрешая последние два уравнения (1.86) относительно λ_1, λ_2, получим

$$\lambda_1 = \frac{m_2}{m_1(m_1 + m_2)}(m_1 X\cos\theta - m_1 m_2(2\dot x_1\dot\theta - g)\cos^2\theta\sin\theta -$$
$$- m_1(m_1 + m_2\sin^2\theta)(l\dot\theta^2 + g\sin\theta)),$$

$$\lambda_2 = \frac{m_2}{m_1(m_1 + m_2)}(m_1 X\sin\theta + m_1(2\dot x_1\dot\theta - g)\cos\theta(m_1 + m_2\cos^2\theta) +$$
$$+ m_1 m_2(l\dot\theta^2 + g\sin\theta)\sin\theta\cos\theta). \tag{1.87}$$

.

Что касается величины λ, то после подстановки λ_1, λ_2 будем иметь

$$\lambda = -(m_1 + m_2)g - m_2(l\dot\theta^2\sin\theta + 2\dot x_1\dot\theta\cos^2\theta - 2g\cos^2\theta),$$

или учитывая, что

$$\dot{x}_1 = \frac{l\dot{\theta}}{2\sin\theta}, \tag{1.88}$$

получим

$$\lambda = -(m_1 + m_2)g - m_2(l\dot{\theta}^2 \sin\theta + \frac{l\dot{\theta}^2}{\sin\theta}\cos^2\theta - 2g\cos^2\theta),$$

или
$$\lambda = -(m_1 + m_2)g - m_2(\frac{l\dot{\theta}^2}{\sin\theta} - 2g\cos^2\theta). \tag{1.89}$$

Видим, что множители Лагранжа не зависят от μ, т.е.силы связей не зависят от сил трения и при произвольном соотношении масс точек системы.

Если возможные перемещения системы образовать из $\vec{\rho}_1\delta t$ и $\vec{\rho}_2\delta t$, как было предложено П. Пенлеве, то для множителей Лагранжа будем иметь

$$\lambda_2 = \frac{Xq\sin\theta + m_1((l\dot{\theta}^2 + g\sin\theta)\sin\theta\cos\theta + (2\dot{x}_1\dot{\theta} - g)(q + \cos^2\theta)Cos\theta)}{q(q+1)} + (q-1)\mu, \tag{1.90}$$

$$\lambda_1 = \frac{Xq\cos\theta - m_1((l\dot{\theta}^2 + g\sin\theta)(q + \sin^2\theta) + (2\dot{x}_1\dot{\theta} - g)\cos^2\theta\sin\theta)}{q(q+1)} - (q-1)\sin\theta\,\mu \tag{1.91}$$

Отсюда видно, что множители Лагранжа λ и λ_1 в этом случае будут зависеть от μ, и только при частном предположении о равенстве $q = \frac{m_1}{m_2} = 1$ из системы уравнения (1.90)-(1.91) получим систему (1.87).

Теперь составим уравнение движения системы в виде уравнения Лагранжа второго рода.

В качестве обобщенной координаты возьмём угол θ. В этом случае уравнение связи (1.67) примет вид

$$\dot{x}_1 = \frac{l\dot{\theta}}{2\sin\theta}. \qquad (1.92)$$

Это уравнение интегрируется в квадратурах и представляет собой геометрическую связь вида

$$tg\frac{\theta}{2} = e^{x_1}.$$

Кинетическая энергия системы может быть представлена в виде

$$T = \frac{1}{8}\frac{(m_1 + m_2)l^2}{\sin^2\theta}\dot{\theta}^2. \qquad (1.93)$$

Вычислим обобщенные силы, соответствующие активным и пассивным силам,

$$\delta A = X\delta x + mgl\cos\theta\delta\theta = (X\frac{l}{2\sin\theta} + mgl\cos\theta)\delta\theta,$$

$$Q = \frac{Xl}{2\sin\theta} + mgl\cos\theta.$$

Что касается обобщенной силы $Q_{тр}$, соответствующей силам трения, то здесь все выкладки проведем подробным образом. Так как равнодействующая сил реакций для точки M_1 равна $(\vec{R} - \vec{R}_{21} + \vec{R}_{22})$, а для точки M_2 равна $(\vec{R}_{21} + \vec{R}_{22})$, то сумма элементарных работ системы сил $\vec{R}_{21}, -\vec{R}_{21}$ равняется нулю, поскольку эти силы направлены вдоль стержня в противоположных направлениях.

Для остальных составляющих сил реакций имеем

$$\delta A_{тр} = (\vec{R} + \vec{R}_{22})\delta\vec{r}_1 + \vec{R}_{22}\delta\vec{r}_2 = = (\vec{Y} + \vec{\rho}_1 + 2(\vec{\rho}_{22} + \vec{\rho}\,'_{22}))\delta\vec{r}_1 + \vec{R}_{22}\left[\delta\vec{\theta}\times\overrightarrow{M_1M_2}\right] =$$

$$= \rho_1\delta x_1 + 2(\rho_{22} + \rho'_{22})\sin\theta\,\delta x_1 - l(\rho_{22} + \rho'_{22})\delta\theta. \qquad (1.94)$$

Если иметь в виду (1.92), то получим

$$\delta A_{тр} = \frac{\rho_1 l}{2\sin\theta}\delta\theta.$$

Таким образом,

$$Q_{тр} = \frac{\rho_1 l}{2\sin\theta} = \frac{m_1\mu l}{2\sin\theta}, \qquad (1.95)$$

а уравнение Лагранжа примет вид

$$\frac{d}{dt}[(m \ + m_2)\frac{l^2\dot{\theta}}{4\sin\theta}] = \frac{Xl}{2\sin\theta} + m_2 gl\cos\theta + \frac{m_1\mu l}{2\sin\theta}, \qquad (1.96)$$

где значение μ определяется из соотношения (1.82), то есть

$$\mu = \frac{\varepsilon f\lambda}{m_1 + m_2} = \frac{\varepsilon f}{m_1 + m_2}\ (-(m_1 + m_2)g - m_2(\frac{l\dot{\theta}^2}{\sin\theta} - 2g\cos^2\theta)).$$

(1.97)

Подставляя μ в (1.96), будем иметь

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(m_1 + m_2)l[\frac{\ddot{\theta}}{\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta\dot{\theta}^2}{\sin^3\theta}] = m_2 g\cos\theta + \frac{X}{2\sin\theta} + \\ &+ \frac{f\varepsilon}{2\sin\theta}(-(m_1 + m_2)g - m_2(l\dot{\theta}^2\frac{1}{\sin\theta} - 2g\cos^2\theta)).\end{aligned} \qquad (1.98)$$

Последнее уравнение можно решить численным методом для конкретных начальных условий и для конкретных значений горизонтальной силы *X*. В приложении 1 оно решено методом Рунге –Кутта [51].

Уравнение движения, как видно, имеет достаточно сложную структуру, поэтому в данной ситуации удобно не исключать переменную x_1, то есть составить уравнения движения в избыточных координатах

$$\begin{aligned}&(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = X + m_1\mu + m_2 l\, g\cos\theta, \\ &\dot{x}_1\sin\theta = l\dot{\theta}.\end{aligned} \qquad (1.99)$$

Выше при составлении уравнения движения мы оставили в стороне случай, когда $\dot{x}_1 = 0$, то есть имеет место трение покоя. В этом случае возможны два варианта:

1. Пусть скорость и ускорение точки M_1 одновременно равны нулю. Тогда для силы трения покоя имеет место следующее соотношение:

$$R_\tau = R_{12}\cos\theta + R_{22}\sin\theta - X = (\lambda_1 + m_2\mu\cos\theta)\cos\theta +$$
$$+ (\lambda_2 + m_2\mu\sin\vartheta)\sin\theta - X = \lambda_1\cos\theta + \lambda_2\sin\theta + m_2\mu - X.$$

С другой стороны,

$$R_\tau = (m_1 + m_2)\mu.$$

Отсюда следует, что

$$m_1\mu = \lambda_1\cos\theta + \lambda_2\sin\theta - X\ .$$

Подставляя $\dot{x}_1 = 0, \dot{\theta} = 0$ в выражения для λ_1, λ_2, будем иметь:

$$\lambda_2 = \frac{m_2}{m_1(m_1 + m_2)}(m_1 X\sin\theta - m_1 g\cos\theta(m_1 + m_2\cos^2\theta) + m_1 m_2 g\sin^2\theta\cos\theta),$$

$$\lambda_1 = \frac{m_2}{m_1(m_1 + m_2)}(m_1 X\cos\theta - m_1 m_2 g\cos^2\theta\sin\theta + m_1(m_1 + m_2\sin^2\theta)g\sin\theta),$$

$$\lambda = -(m_1 + m_2)g + m_2 2g\cos^2\theta.$$

Таким образом,

$$\lambda_1\cos\theta + \lambda_2\sin\theta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}[X - m_1 g\sin 2\theta],$$

$$m_1\mu = \lambda_1\cos\theta + \lambda_2\sin\theta - X = \frac{m_2}{m_1 + m_2}[X - m_1 g\sin 2\theta] - X =$$
$$= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}[X + m_2 g\sin 2\theta] .$$

Полученное отсюда μ подставим в неравенство

$$|R_\tau| \le f|\lambda|,$$

будем иметь:

$$|X + m_2 g \sin 2\theta| \le f\left|(m_1 + m_2)g - m_2 2g \cos^2\theta\right|. \qquad (1.100)$$

Если неравенство (1.100) выполняется, то x_1 остается постоянной и наоборот, если это неравенство не выполняется, то

$$R_\tau = (m_1 + m_2)\mu = \varepsilon f(-(m_1 + m_2)g + 2m_2 g \cos^2\theta),$$

где знак ε выбирается противоположным знаку выражения

$$\lambda_1 \cos\theta + \lambda_2 \sin\theta + m_2\mu - X .$$

Таким образом, для получения полной картины движения рассмотренной системы необходимо знание не только элементарных работ активных сил и сил трения на возможных перемещениях системы, но и силы связей, действующие на механическую систему.

Задача 2. В качестве второго примера голономной системы с трением рассмотрим задачу Аппеля о движении лестницы AB массы m и длины $2l$, опирающейся на горизонтальный пол Ox и вертикальную стену Oy [22] (Рис.1.3.). Лестнице сообщена начальная скорость, причем так, что точка B приближается к точке O. Найти движение лестницы, предполагая, что имеется трение по стене и по полу и что коэффициенты трения различны и равны соответственно f_A *и* f_B. После того как лестнице сообщен начальный толчок, на нее будут действовать следующие силы: собственный вес $m\bar{g}$, приложенный в точке G; нормальная реакция $\vec{R}_B^n$ пола в точке B и сила трения $\vec{R}_B^\tau$, направленная от B к O; нормальная реакция $\vec{R}_A^n$ стены в точке A и сила трения

$\vec{R}_A^\tau$, направленная по OA. Обозначим через α угол между лестницей и стеной, через $2l$ – длину лестницы и через J - ее момент инерции относительно оси, проходящей через точку G перпендикулярно к плоскости движения.

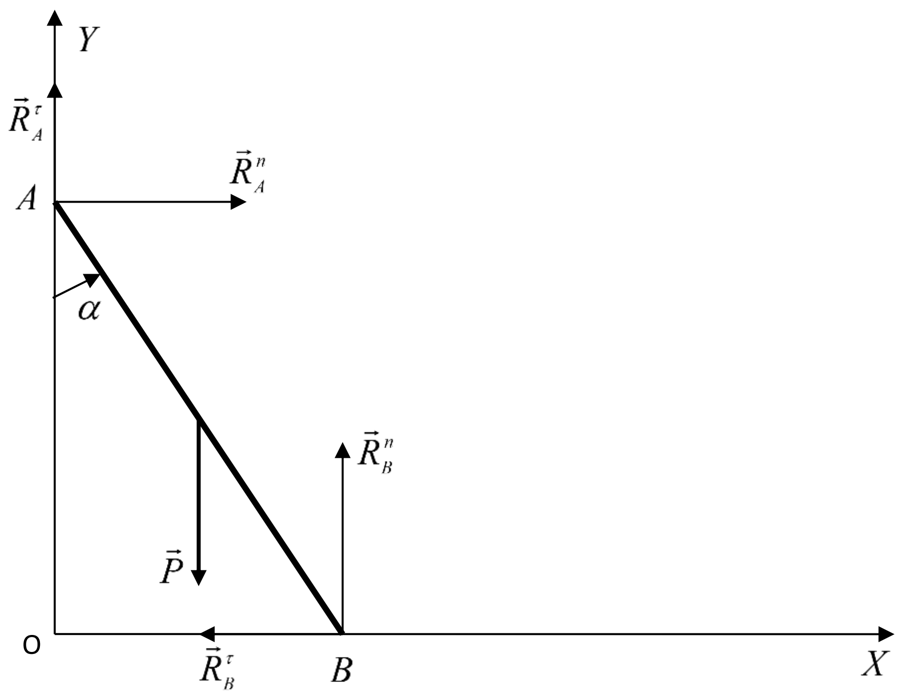

Рис.1.3. Задача Аппеля.

В работе [22] эта задача была рассмотрена в связи с разработкой методики определения нормальных и касательных составляющих сил реакций неидеальных связей. Приложение этой методики к данной задаче привело к заключению, что нормальная составляющая зависит от касательной составляющей. Ниже показывается, что такой вывод не является обоснованным. В качестве обобщенной координаты примем угол α между осью Oy и лестницей.

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_G{}^2 + \dot{y}_G^2\right) + \frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2.$$

Координаты центра масс x_G, y_G выражаются через угол α следующим образом

$$x_G = l\sin\alpha,\ y_G = l\cos\alpha.$$

Поэтому

$$\dot{x}_G = l\cos\alpha\dot{\alpha},$$

$$\dot{y}_G = -l\sin\alpha\dot{\alpha},$$

$$\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 = l^2\dot{\alpha}^2,$$

$$T = \frac{1}{2}(ml^2 + J)\dot{\alpha}^2.$$

Для определения обобщенной силы трения Q, обусловленной силами трения в точках A и B, составим элементарную работу сил трения на возможных перемещениях

$$\delta A^\tau = R_A^\tau \delta y_A - R_B^\tau \delta x_B,$$

где

$$x_B = 2l\sin\alpha,\ y_A = 2l\cos\alpha.$$

Для возможных перемещений будем иметь

$$\delta x_B = 2l\cos\alpha\delta\alpha,\ \delta y_A = -2l\sin\alpha\delta\alpha,$$

поэтому

$$\delta A^\tau = -2l(R_A^\tau \sin\alpha + R_B^\tau \cos\alpha)\delta\alpha, \qquad (1.101)$$

откуда получим

$$Q_{mp} = -2l(R_A^\tau \sin\alpha + R_B^\tau \cos\alpha). \qquad (1.102)$$

Для определения входящих сюда сил трения воспользуемся законом Кулона

$$R_A^\tau = f_A\ R_A^n,$$

$$R_B^\tau = f_B\ R_B^n. \qquad (1.103)$$

Учитывая, что силы трения относятся к внешним силам и, применяя теорему о движении центра масс, будем иметь

$$m\ddot{x}_G = R_A^n - R_B^\tau,$$

$$m\ddot{y}_G = R_B^n + R_A^\tau - mg. \qquad (1.104)$$

Вычисляя составляющие ускорения центра масс

$$\ddot{x}_G = l\cos\alpha\,\ddot{\alpha} - l\sin\alpha\cdot\dot{\alpha}^2$$

$$\ddot{y}_G = -l(\sin\alpha\,\ddot{\alpha} + \cos\alpha\cdot\dot{\alpha}^2)$$

и подставляя их в (1.103) с учетом (1.104) получим

$$m\ddot{x}_G = R_A^n - f_B R_B^n,$$

$$m\ddot{y}_G = f_A R_A^n + R_B^n - mg.$$

Разрешая эту систему уравнений относительно R_A^τ, R_B^τ, будем иметь

$$R_A^n = \frac{m(\ddot{x}_G + f_B(\ddot{y}_G + g))}{1 + f_A\ f_B},$$

$$R_B^n = \frac{m(\ddot{y}_G - f_A\ddot{x}_G + g)}{1 + f_A f_B},$$

или, подставляя $\ddot{y}_G, \ddot{x}_G$, получим

$$R_B^n = -\frac{m}{1+f_A f_B}(l(\sin\alpha + f_A\cos\alpha)\ddot{\alpha} + l(\cos\alpha - f_A\sin\alpha)\dot{\alpha}^2 - g),$$

$$R_A^n = \frac{m}{1+f_A f_B}((-f_B\sin\alpha + \cos\alpha)l\ddot{\alpha} - l(f_B\cos\alpha + \sin\alpha)\dot{\alpha}^2 + f_B g). \quad (1.105)$$

Таким образом, для обобщенной силы трения имеем

$$Q_{mp} = -\frac{2m}{1+f_A f_B}(l^2((f_A - f_B)\sin\alpha\cos\alpha - f_A f_B)\ddot{\alpha} -$$
$$-l^2(f_A\sin^2\alpha + f_B\cos^2\alpha)\dot{\alpha}^2) - \frac{2ml}{1+f_A f_B}(f_A\sin\alpha + \cos\alpha)f_B g$$

Для нахождения обобщенной силы Q, обусловленной собственным весом лестницы, составим элементарную работу силы тяжести

$$\delta A = -mg\delta y_G = mgl\sin\alpha\delta\alpha .$$

Таким образом, уравнение Лагранжа для данной системы будет следующим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial\alpha} = Q_\alpha + Q_{mp},$$

или в явном виде

$$(ml^2 + J + \frac{2l^2 m}{1+f_A f_B}((f_A - f_B)\sin\alpha\cos\alpha - f_A f_B))\ddot{\alpha} =$$
$$= \frac{2ml^2}{1+f_A f_B}(f_A\sin^2\alpha + f_B\cos^2\alpha)\dot{\alpha}^2 -$$
$$-\frac{2ml}{1+f_A f_B}(f_A\sin\alpha + \cos\alpha)f_B g + mgl\sin\alpha. \quad (1.106)$$

Рассмотрим частные случаи

1. Предположим, что $f_A = f_B = f$. Тогда уравнение движения примет вид

$$(ml^2 + J - \frac{2l^2 m}{1+f^2} f^2)\ddot{\alpha} = \frac{2ml^2}{1+f^2} f\dot{\alpha}^2 - \frac{2ml}{1+f^2}(f\sin\alpha + \cos\alpha) fg + mgl\sin\alpha. \tag{1.107}$$

Если считать лестницу однородным стержнем, то $J = \frac{ml^2}{3}$.

Покажем, что уравнение (1.107) интегрируется в квадратурах.

Действительно, если иметь ввиду, что $\ddot{\alpha} = \dot{\alpha}\frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha}, a = \frac{2}{1+f^2}$ то, уравнение движения можно записать в виде

$$(a - \frac{2}{3})\dot{\alpha}\frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} = af\dot{\alpha}^2 - \frac{g}{l}((af^2 - 1)\sin\alpha + af\cos\alpha). \tag{1.108}$$

Интегрируя с помощью метода вариации произвольных постоянных [22], получим

$$(a - \frac{2}{3})\dot{\alpha}\frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} = af\dot{\alpha}^2; \quad (a - \frac{2}{3})\frac{d\dot{\alpha}}{\dot{\alpha}} = fad\alpha,$$

$$\dot{\alpha} = C_1 e^{\frac{af}{a-\frac{2}{3}}\alpha}, \quad \frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} = C_1'' e^{\frac{af}{a-\frac{2}{3}}\alpha} + \frac{C_1 af}{a - \frac{2}{3}} e^{\frac{af\alpha}{a-\frac{2}{3}}}.$$

Далее, подставляя в (1.108), получим уравнение для определения C_1

$$(a - \frac{2}{3})C_1 C_1' = -\frac{g}{l}((af^2 - 1)\sin\alpha + af\cos\alpha)e^{-\frac{2af\alpha}{a-\frac{2}{3}}}.$$

Учитывая значения интегралов

$$I_1 = \int e^{b\alpha} \sin\alpha \, d\alpha = \frac{1}{1+b^2}(b\sin\alpha - \cos\alpha)e^{b\alpha},$$

$$I_2 = \int e^{b\alpha} \cos\alpha \, d\alpha = \frac{1}{1+b^2}(\sin\alpha + b\cos\alpha)e^{b\alpha},$$

где $b = -2af/(a - \frac{2}{3})$,

получим

$$\frac{1}{2}(a-\frac{2}{3})(C_1^2 - \tilde{C}) = -\frac{ge^{b\alpha}}{(1+b^2)l}[((af^2-1)b + af)\sin\alpha + (baf - (af^2-1))\cos\alpha].$$

Таким образом, имеем

$$\dot{\alpha}^2 = [\frac{g2}{l(1+b^2)(\frac{2}{3}-a)}[((af^2-1)b + af)\sin\alpha + (baf - (af^2-1))\cos\alpha]] + \tilde{C}e^{b\alpha},$$

(1.109)

где $\tilde{C}$ определяется из начальных условий $\alpha = \alpha_0, \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0$

$$\tilde{C} = e^{-b\alpha}[\dot{\alpha}_0{}^2 - [\frac{g2}{l(1+b^2)(\frac{2}{3}-a)}[((af^2-1)b + af)\sin\alpha_0 + (baf - (af^2-1))\cos\alpha_0]].$$

В этом случае составляющие сил реакций имеют вид:

$$R_A = \frac{m}{1+f^2}[\ ((\frac{alf}{a-\frac{2}{3}} - f\cdot l)\cos\alpha - (\frac{alf^2}{a-\frac{2}{3}} + l)\sin\alpha)\dot{\alpha}^2 -$$

$$\frac{g}{(a-\frac{2}{3})}(\cos\alpha - f\sin\alpha)((af^2-1)\sin\alpha + a\cos\alpha) + fg\ ] > 0 \qquad (1.110)$$

$$R_B = \frac{m}{1+f^2}[-((\frac{a}{a-\frac{2}{3}}-1)lf\sin\alpha + (\frac{af^2}{a-\frac{2}{3}}+1)l\cos\alpha)\dot{\alpha}^2 +$$

$$+\frac{g}{a-\frac{2}{3}}(\sin\alpha + f\cos\alpha)((af^2-1)\sin\alpha + af\cos\alpha) + g] > 0$$

На рис 1.4. и рис. 1.5. приведены графики изменения величин сил реакций R_A, R_B в зависимости от значений угла α , а на рис.1.6.-график зависимости начальной угловой скорости $\dot{\alpha}_0$ от угла наклона α . По оси абсцисс откладывается угол α в радианах, по оси ординат- силы реакций R_A (рис 1.4.), R_B (рис.1.5.) и угловая скорость $\dot{\alpha}$ (рис.1.6.) (см. Приложение 2).

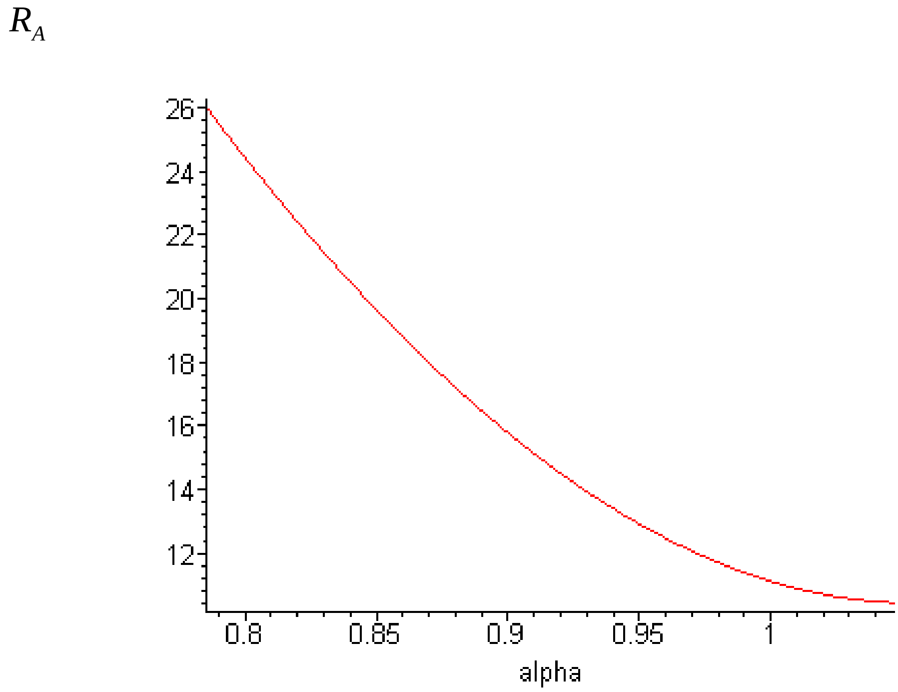

Рис.1.4. Изменение величины силы реакции R_A

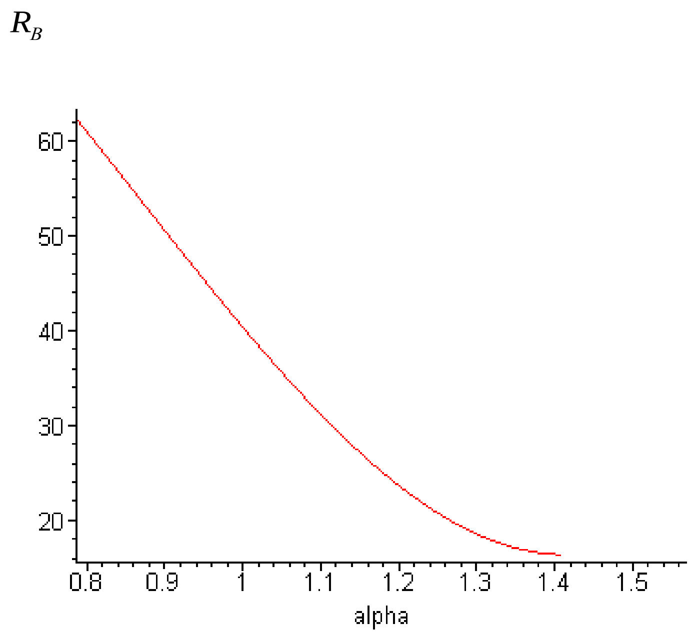

Рис 1.5. Изменение величины силы реакции R_B

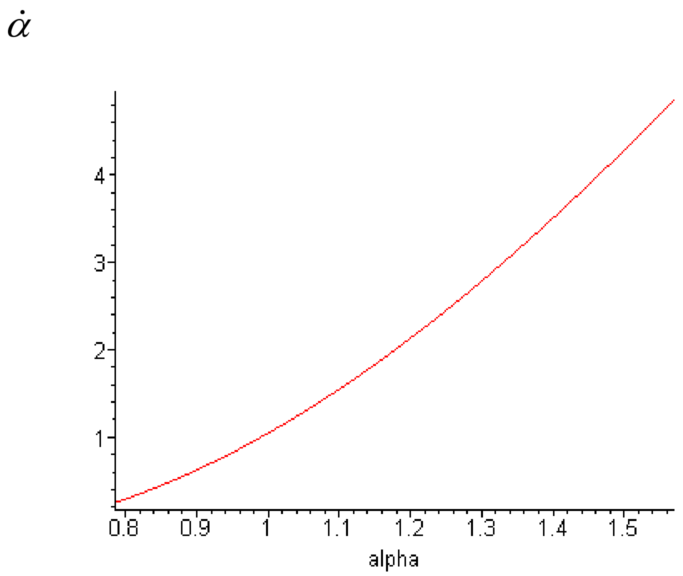

Рис 1.6. Изменение угловой скорости

Из графиков видно, что при увеличении угла α до 60^0 обе составляющие реакций убывают. При больших значениях угла α результаты графиков имеют только теоретическое значение.

2. При $f_1 = f_2 = 0$ (связи являются идеальными) уравнение движения примет вид

$$(ml^2 + J)\ddot{\alpha} = Pl\sin\alpha,$$

или

$$\ddot{\alpha} = \frac{3g}{4l}\sin\alpha$$

Интегрируя, получим

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} - \frac{\dot{\alpha}_0^2}{2} = -\frac{3g}{4l}(\cos\alpha - \cos\alpha_0).$$

Соответственно для сил реакции имеем

$$R_A^n = m[\frac{3}{4}g\cos\alpha\sin\alpha - l\sin\alpha\dot{\alpha}^2],$$

$$R_B^n = mg - m[\frac{3}{4}g\sin^2\alpha + l\cos\alpha\dot{\alpha}^2].$$

Если имеют место следующие начальные условия, $\alpha = \alpha_0, \dot{\alpha} = 0$, то условие отрыва с учетом интеграла (1.109) примет вид

$$\cos\alpha = 2\cos\alpha_0.$$

Таким образом, в данной главе обоснована необходимость расширения метода комбинирования связей. Дано обобщение этого метода с использованием особого типа возможных перемещений. Показано, что расширенный метод комбинирования связей позволяет определить закон трения системы; позволяет определить составляющие сил связей, не зависящие от сил трения, и составить дифференциальные уравнения движения механических систем с геометрическими неидеальными связями без ограничений на инерционные члены системы, в которых силы связей не зависят от сил трения.

ГЛАВА 2

О ДВИЖЕНИИ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ НЕГОЛОНОМНЫЕ НЕИДЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ

В этой главе рассматривается вопрос распространения расширенного метода комбинирования связей на неголономные системы с неидеальными связями. Получены дифференциальные уравнения движения механической системы, которые обладают тем свойством, что из этих уравнений можно получить явные выражения сил связей, не зависящие от сил трения (2.1.).

В параграфе 2.2. даётся обобщение принципа наименьшего принуждения Гаусса для систем с неидеальными связями (для систем с трением) в случае, когда возможные перемещения удовлетворяют условиям расширенного метода комбинирования связей.

2.1. Дифференциальные уравнения движения неголономных систем с неидеальными связями

Рассмотрим механическую систему из N материальных точек M_K ($k=1,2,...,N$) с массами m_k, положение которых относительно инерциальной декартовой системы координат определяется радиус–векторами $\vec{r}_k(x_\gamma)$ ($\gamma=1,2,...,3N$). Система находится под действием заданных сил $\vec{F}_k(X_\gamma)$ и стеснена совместными и независимыми связями, среди которых имеются как геометрические

$$f_\alpha(x_1,x_2,...,x_{3N},t)=0 \qquad (\alpha=1,...,a), \tag{2.1}$$

так и кинематические, вообще говоря, нелинейные

$$\varphi_\beta(x_\gamma, \dot{x}_\gamma, t) = 0 \qquad (\beta = 1,...,b). \tag{2.2}$$

Возможные перемещения, допускаемые связями, определим независимыми соотношениями

$$\sum_{\gamma=1}^{3N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma} \delta x_\gamma = 0, \ \sum_{\gamma=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{x}_\gamma} \delta \dot{x}_\gamma = 0. \tag{2.3}$$

Если ввести обобщенные координаты $q_1, q_2, ..., q_n \ (n = 3N - a)$ с учетом уравнений связей (2.1), то многообразия допустимых состояний системы можно представить в виде

$$x_\gamma = a_\gamma(q_i, t), \qquad \dot{x}_\gamma = b_\gamma(q_i, p_j, t) \tag{2.4}$$

где p_j $(j = 1, 2, ...r; \quad r = 3N - (a + b))$ – независимые скоростные параметры; $(i = 1, 2, ...n)$. Вариации декартовых координат можно выразить через произвольные независимые величины $\delta\pi_j$ (квазикоординаты) следующим образом:

$$\delta x_\gamma = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial b_\gamma}{\partial p_j} \delta\pi_j. \tag{2.5}$$

Предположим, что сумма элементарных работ сил реакций $\vec{R}_k$ на любом возможном перемещении отлична от нуля

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k \delta \vec{r}_k \neq 0. \tag{2.6}$$

Известно, что связи в этом случае будут относиться к связям с трением.

Реакцию связи $\vec{R}_k$, действующую на точку M_k, разложим на две составляющие силы $\vec{R}_k^\tau$ и $\vec{R}_k^n$, обладающие следующими свойствами:

1. На всяком возможном перемещении системы $\delta \vec{r}_k$

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{R}^{n}{}_{k}\delta\vec{r}_k=0\ ,\ \ \sum_{k=1}^{N}\vec{R}_k^{\tau}\delta\vec{r}_k\neq 0. \tag{2.7}$$

2. Перемещение системы, при котором каждая точка M_k получает перемещение $\dfrac{\vec{R}_k^{\tau}}{m_k}\delta t$, есть возможное перемещение.

Силу $\vec{R}_k^{n}$ называют силой связи, силу $\vec{R}_k^{\tau}$ - силой трения. Эти силы имеют следующий вид:

$$R_\gamma^n=\sum_{\alpha=1}^{a}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma}+\sum_{\beta=1}^{b}\ u_\beta\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{x}_\gamma},$$

$$R_\gamma^\tau=\sum_{j=1}^{r}\mu_j\frac{\partial(m_\gamma\dot{x}_\gamma)}{\partial p_j},$$

где λ_α, u_β и μ_j - некоторые коэффициенты.

Покажем, что если в какой-то момент времени известны положения и скорости точек системы, а также действующие на эти точки активные силы $\overline{F}_k$, то силы связей $\vec{R}_k^{n}$ определяются и будут одними и теми же, независимо от того, обладает ли данная система трением или нет. Чтобы показать это, запишем уравнения движения точек системы в следующем виде

$$\ddot{x}_\gamma=\frac{1}{m_\gamma}\left(X_\gamma+\sum_{\alpha=1}^{a}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma}+\sum_{\beta=1}^{b}u_\beta\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{x}_\gamma}+\sum_{j=1}^{r}\ \mu_j\frac{\partial(m_\gamma\dot{x}_\gamma)}{\partial p_j}\right). \tag{2.8}$$

Дифференцируя по времени уравнения (2.1) два раза, а уравнения (2.2) – один раз, и подставляя вместо $\ddot{x}_\gamma$ значения из (2.8), получим систему $a+b$ линейных уравнений, позволяющих определить множители $\lambda_\alpha, \mu_\beta$ как функции координат x_γ, скоростей $\dot{x}_\gamma$, времени t, а также заданных сил X_γ. Члены же, содержащие силы трения, входить не будут, так как для них будут выполнены условия

$$\sum_{\gamma=1}^{3N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma}\sum_{j=1}^{r}\mu_j\frac{\partial \dot{x}_\gamma}{\partial p_j}=\sum_{j=1}^{r}\mu_j\Big(\sum_{\gamma=1}^{3N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma}\frac{\partial \dot{x}_\gamma}{\partial p_j}\Big)=0,$$

$$\sum_{\gamma=1}^{3N}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\gamma}\sum_{j=1}^{r}\mu_j\frac{\partial \dot{x}_\gamma}{\partial p_j}=\sum_{j=1}^{r}\mu_j\Big(\sum_{\gamma=1}^{3N}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\gamma}\frac{\partial \dot{x}_\gamma}{\partial p_j}\Big)=0.$$

В результате введения скоростных параметров, величины f_α и φ_β обратятся тождественно в ноль. Производные от левых частей этих тождеств по p_j также тождественно равны нулю. Поэтому скобки в последних выражениях равны нулю. Из системы $a+b$ линейных уравнений величины λ_α и u_β определяются независимо от сил трения.

Будем считать, что экспериментальные данные определяют μ_j в функции λ_α и u_β, то есть будем считать, что закон трения известен.

Таким образом, если считать закон трения известным, то для описания движения системы к уравнениям (2.8) должны быть присоединены $a+b$ уравнений связей (2.1), (2.2) и r соотношений, получаемых из закона трения, выражающих μ_j в виде некоторых функций времени, координат и скоростей точек системы, а также заданных сил.

Сообщая системе произвольное возможное перемещение, в силу условия (2.7), получим уравнение:

$$\sum_{k=1}^{N}(\vec{F}_k+\vec{R}_k^{\tau}-m_k\vec{w}_k)\delta\vec{r}_k=0. \qquad (2.9)$$

выражающее собой общее уравнение динамики для рассматриваемых систем с неидеальными связями.

Применительно к системам с трением уравнение (2.9) представляет собой необходимое и достаточное условие соответствия заданным силам совместимого со связями движения системы при известном законе трения системы.

2.2. Принцип Гаусса для систем с неидеальными связями в случае возможных перемещений, удовлетворяющих расширенному методу комбинирования связей

Рассмотрим вопрос применимости принципа Гаусса для систем с неидеальными связями (связи с трением) в случае образования возможных перемещений, которые были предложены в предыдущем параграфе.

Для этого дифференцируя по времени уравнения (2.1) два раза, а уравнения (2.2) один раз, получим:

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma}\ddot{x}_\gamma + A_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1,...,a), \tag{2.10}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{x}_\gamma}\ddot{x}_\gamma + B_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,...,b), \tag{2.11}$$

где A_α и B_β, члены, не содержащие ускорений, а $\ddot{x}_\gamma$ - действительные ускорения точек системы.

Обозначим через $\ddot{x}'_\gamma$ кинематически возможные ускорения, то есть ускорения, совместимые со связями (2.1) и (2.2). Последние будут удовлетворять условиям:

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma}\ddot{x}'_\gamma + A_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1,...,a), \tag{2.12}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{x}_\gamma}\ddot{x}'_\gamma + B_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,...,b). \tag{2.13}$$

Поскольку A_α и B_β являются функциями времени, координат и скоростей, то из (2.9); (2.12), (2.13) получим

$$\delta\ddot{x}_\gamma = \ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma\ ,$$

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma}\delta\ddot{x}_\gamma = 0,$$

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{x}_\gamma}\delta\ddot{x}_\gamma = 0. \qquad (2.14)$$

Сравнивая эти выражения с условиями на возможные перемещения (2.3), видим, что вариации ускорений удовлетворяют тем же условиям, что и возможные перемещения. Поэтому из (2.9) получим:

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\left(m_\gamma\ddot{x}_\gamma - X_\gamma - R_\gamma^\tau\right)\left(\ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma\right) = 0. \qquad (2.15)$$

Движение системы, которое она будет совершать под действием заданных сил $\overline{F}_k$ и сил, равных силам трения $\vec{R}_k^\tau$, будем называть действительным освобожденным движением. Ускорения точек в действительном освобожденном движении обозначим через a_γ ($\gamma = 1,2,...,3N$).

Поскольку общее уравнение динамики справедливо и для освобожденной системы, то имеет место выражение:

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\left(m_\gamma a_\gamma - X_\gamma - R_\gamma^\tau\right)\left(\ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma\right) = 0. \qquad (2.16)$$

Вычитая теперь (2.15) из (2.16), получим

$$\sum_{\gamma=1}^{3n} m_\gamma\left[\left(\ddot{x}_\gamma - a_\gamma\right)\left(\ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma\right)\right] = 0. \qquad (2.17)$$

Последнее соотношение можно преобразовать к виду:

$$\sum m_\gamma\left[\left(\ddot{x}_\gamma - a_\gamma\right)\left(\ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma\right)\right] = \sum\frac{m_\gamma}{2}\begin{bmatrix}\left(\ddot{x}_\gamma^2 - 2\ddot{x}_\gamma\ddot{x}'_\gamma + x'^2_\gamma\right) - \left(\ddot{x}'^2_\gamma - 2\ddot{x}'_\gamma a_\gamma + a_\gamma^2\right) + \\ +\left(a_\gamma^2 - 2\ddot{x}_\gamma a_\gamma + \ddot{x}_\gamma^2\right)\end{bmatrix}. \qquad (2.18)$$

Если ввести теперь меры отклонения [46] (определение по Гауссу)

$$A_{dD} = \sum \frac{m_\gamma}{2} (\ddot{x}_\gamma - a_\gamma)^2 ,$$

$$A_{\mu g} = \sum \frac{m_\gamma}{2} (a_\gamma - \ddot{x}'_\gamma)^2 ,$$

$$A_{d\mu} = \sum \frac{m_\gamma}{2} (\ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma)^2 ,$$

то из (2.18) получим

$$A_{d\mu} + A_{dD} - A_{\mu g} = 0 . \qquad (2.19)$$

Так как каждое слагаемое последнего соотношения неотрицательно, то должны выполняться условия

$$A_{d\mu} \le A_{\mu g} ,\ A_{dD} \le A_{\mu g} . \qquad (2.20)$$

Второе из этих неравенств представляет собой обобщение принципа наименьшего принуждения Гаусса для систем с неидеальными связями. Согласно этому принципу, среди возможных ускорений действительные ускорения точек системы с неидеальными связями обращают в минимум функцию

$$A_{d\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^{3n} m_\gamma \left(\ddot{x}_\gamma - \frac{X_\gamma + R_\gamma^\tau}{m_\gamma} \right)^2 . \qquad (2.21)$$

Таким образом, согласно полученному принципу Гаусса, среди всех мыслимых ускорений, действительные ускорения точек систем с трением обращают в минимум функцию (2.21) и наоборот, условия минимума функции (2.21) по ускорениям, удовлетворяющие условиям (2.10) и (2.11), приводят к дифференциальным уравнениям действительного движения системы с неидеальными связями

$$\ddot{x}_\gamma = \frac{1}{m_\gamma}\left(F_\gamma + \sum_{\alpha=1}^{a}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma} + \sum_{\beta=1}^{b} u_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{x}_\gamma} + \sum_{j=1}^{r} \mu_j \frac{\partial (m_\gamma \dot{x}_\gamma)}{\partial p_j}\right). \tag{2.22}$$

Таким образом, в данной главе расширенный метод комбинирования связей распространен на неголономные системы с неидеальными связями. Показано, что для таких систем имеет место общее уравнение динамики, которое позволяет обобщить принцип наименьшего принуждения Гаусса.

Следует отметить, что для систем с неидеальными кинематическими связями, как было отмечено в предыдущей главе, также имеют место уравнения П.Аппеля.

ГЛАВА 3

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ФРИКЦИОННОГО РЕГУЛЯТОРА СКОРОСТИ

В данной главе рассматривается движение фрикционных регуляторов, на которые, кроме пассивных кинематических связей, наложена неидеальная условная связь в виде постоянства угловой скорости приёмного вала. Получены дифференциальные уравнения движения таких регуляторов скорости, а также рассмотрен вопрос устойчивости движения регулятора по отношению к отклонению от условной связи (случай неточного выполнения условной связи). Следуя алгоритму освобождения от условных связей [86] (применяется метод параметрического освобождения Н.Г.Четаева), рассмотрен вопрос оптимальной стабилизации программного движения регулятора в окрестности многообразия, определяемого условной связью. Показано, что система управляемая по первому приближению. Составлены уравнения для определения коэффициентов функции Ляпунова, которая решает вопрос оптимальной стабилизации стационарных движений регулятора скорости. Получен явный вид управляющей силы, которая реализует условную связь. Рассмотрен вопрос влияния упругости промежуточного колеса (учет упругости осуществляется с помощью дискретной модели качения, то есть в рамках классической механики) на устойчивость стационарного движения регулятора и получены условия, при выполнении которых имеет место устойчивость по первому приближению.

3.1. Задача о движении фрикционного регулятора скорости при наличии условной связи. Составление дифференциальных уравнений. Исследование на устойчивость программных движений регулятора скорости

Следует отметить, что исследованию фрикционных регуляторов скорости посвящены работы В.С.Новоселова , А.И.Лурье , А.Г.Азизова.

В работах и составлены дифференциальные уравнения движения редуктора скорости и рассмотрен вопрос устойчивости стационарного движения в классическом исполнении, то есть механизм осуществляет передачу вращения от вала 1 к барабану A, жестко насаженному на вал *2*. Диск C закреплен на валу *1* жестко, а колесо *B* может свободно вращаться на невращающемся валике *3*, но смещается поступательно вдоль оси этого валика. Центробежный регулятор N вращается на одном валу с барабаном A, перемещение его муфты D с помощью тросика, пропущенного по неподвижным роликам O_1 и O_2, передается валику *3*. Вследствие этого, колесико *B* при изменении угловой скорости ω_2 вала *2* (разгон или торможение) будет смещаться вместе с валом *3* по диску C. Допускается, что вследствие этого должно восстанавливаться «исходное» значение ω_2 (рис.3.1.). Здесь M_1, M_2 –моменты внешних сил, приложенных к валам 1 и 2 соответственно; c_1,c_2-жесткости пружин.

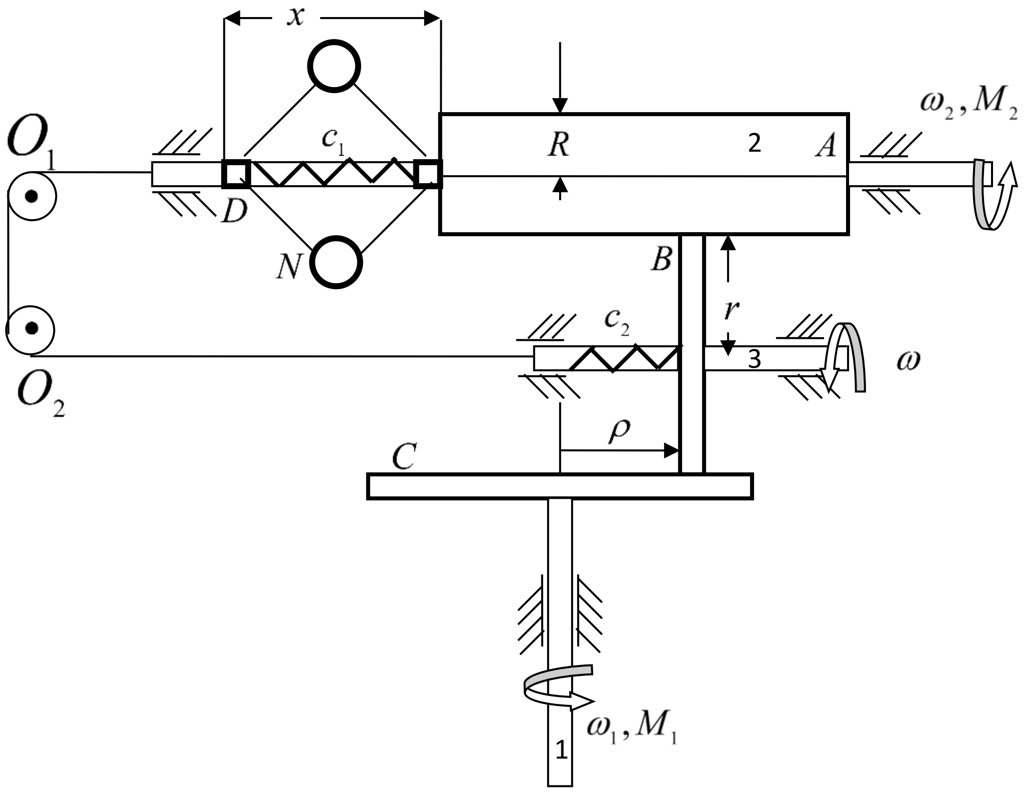

Рис.3.1. Фрикционный редуктор.

Устойчивость стационарного движения при постоянных значения $M_1 = M_1^0,\ M_2 = M_2^0$ может быть достигнута, если к валу *2* подводится мощность $M_2^0\omega_2 > 0$, а вал *1* является ее приемником $M_1^0\omega_1. < 0$ и коэффициенты характеристического уравнения первого приближения уравнений возмущенного движения удовлетворяют известному критерию Гурвица, которое сводится к рассмотрению диаграммы Вышнеградского.

В работе А.Г.Азизова рассмотрен вопрос стабилизации стационарного движения редуктора с точки зрения неточного выполнения пассивных связей без учета регулирующего механизма с применением метода параметрического освобождения Н.Г. Четаева . Следует отметить, что вопрос стабилизации сводится к построению регулирующего механизма, который вырабатывает управляющее воздействие, приложенное к промежуточному колесу.

Полученные результаты, несомненно, являются важными с точки зрения инженерного конструирования различных видов редукторов.

М.Н.Сидиков рассмотрел возможность регулирования угловой скорости регулятора другого типа с помощью промежуточного диска с упругой периферией. При этом регулирование осуществляется за счет упругости промежуточного колеса, то есть проскальзывание промежуточного колеса отсутствует, но имеет место псевдоскольжение в поперечном направлении. Движение промежуточного колеса в поперечном направлении моделируется с помощью модели качения М.В.Келдыша . Как известно, при исследовании качения пневматика принимаются различные феноменологические модели , в том числе и модель М.В. Келдыша.

При постановке задачи с упругой периферией условия устойчивости стационарного движения регулятора оказываются совсем другими, чем в случае твердого промежуточного колеса. Из полученных результатов можно сделать вывод, что при имеющейся конструкции не всегда возможно поддерживать «исходные» значения угловой скорости приёмного вала $\dot{\varphi}_2$ (приходится приложить момент к валу *1* и ограничить стационарные значения угловых скоростей ω_1^0, ω_2^0).

Рассмотрим движение тех же регуляторов, но без классического регулятора и при наличии условной связи, применяя общую теорию систем с условными связями.

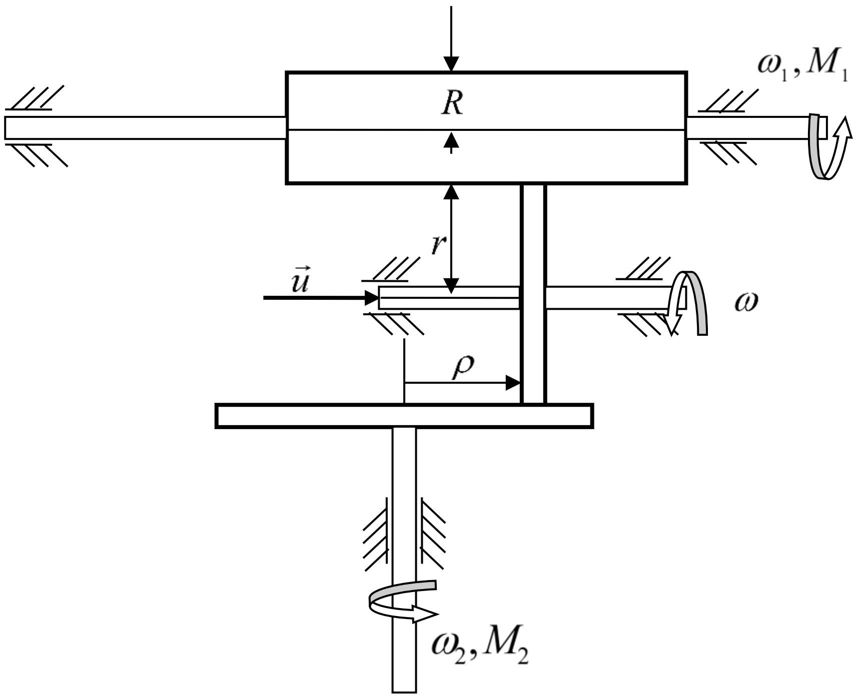

Рис.3.2. Регулируемый фрикционный регулятор скорости.

На рисунке 3.2. изображен механизм, который осуществляет передачу вращения от вала 2 к валу 1. Передача вращения осуществляется с помощью горизонтального перемещения промежуточного колеса при воздействии управляющей силы $\vec{u}$.

Здесь R, r -радиус барабана и промежуточного диска,

ω-угловая скорость промежуточного диска,

ω_1 - угловая скорость вала 1,

ω_2 - угловая скорость приёмного вала 2,

ρ-расстояние от оси второго диска до точки контакта

Задача формулируется следующим, образом: каково должно быть движение промежуточного колеса и силовое воздействие на ось промежуточного колеса, чтобы поддерживать постоянное значение угловой скорости ω_2 приемного вала при ограниченном значении момента внешних сил M_2, приложенного к приёмному валу.

Будем предполагать, что имеет место соотношение

$M_2' < M_2 < M_2''$ $\qquad$ ($M_2' > 0$).

где M_2'-нижняя граница момента, приложенного к валу 2.

С точки зрения систем с сервосвязями (условные связи) требуется выполнение условия

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2 = \omega_2^0 = \text{const}. \tag{3.1}$$

С учетом этого уравнения кинематических связей примут вид:

$$R\omega_1 = \rho\omega_2,\ r\omega = \rho\omega_2,\ \omega_2 = \omega_2^0 = const. \tag{3.2}$$

Для данного редуктора энергию ускорений можно записать в следующем виде:

$$S = \frac{1}{2}J_1\left(\dot{\omega}_1^{\,2} + \omega_1^{\,4}\right) + \frac{1}{2}J_2\left(\dot{\omega}_2^{\,2} + \omega_2^{\,4}\right) + \frac{1}{2}J\left(\dot{\omega}^2 + \omega^4\right) + \frac{1}{2}m\ddot{\rho}^2.$$

где

J_1 - момент инерции первого диска;

J_2 - момент инерции второго диска;

J - момент инерции промежуточного диска.

Учитывая уравнения связей

$$\omega = \frac{1}{r}\rho\cdot\omega_2,\ \omega_1 = \frac{1}{R}\rho\cdot\omega_2,$$

энергию ускорений приведём к следующему виду:

$$S=\frac{1}{2}J_1\frac{1}{R^2}\left[\dot{\rho}\cdot\omega_2\ +\rho\cdot\dot{\omega}_2\right]^2\ +\frac{1}{2}J\cdot\frac{1}{r^2}\left[\dot{\rho}\cdot\omega_2\ +\rho\cdot\dot{\omega}_2\right]^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\omega}_2{}^2+\frac{1}{2}m\cdot\ddot{\rho}^2+\dots$$
.

Составим элементарные работы активных сил

$$\delta A_{\varphi 2}=M_1\cdot\delta\varphi_1+M_2\cdot\delta\varphi_2=(M_2+\frac{\rho}{R}M_1)\delta\varphi_2,$$

$$\delta A_u=-(F_{11}+F_{22})\cdot\delta\rho+u\cdot\delta\rho,$$

где u – управляющая сила, действующая на вал промежуточного диска;

F_{11},F_{22} -поперечные составляющие сил трения

Составляя дифференциальные уравнения в форме уравнений Аппеля

$$\frac{\partial S}{\partial\dot{\omega}_2}=Q'_{\varphi_2}$$
$$\frac{\partial S^*}{\partial\ddot{\rho}}=Q'_{\rho},$$

получим следующие дифференциальные уравнения для определения закона изменения расстояния ρ и управляющей силы u

$$\frac{J_1}{R^2}\left[\dot{\rho}\cdot\omega_2\cdot\rho\right]+\frac{J}{r^2}\left[\dot{\rho}\cdot\omega_2\cdot\rho\right]=M_2+\frac{\rho}{R}\cdot M_1,$$

$$m\ddot{\rho}=-(F_{11}+F_{22})+u, \tag{3.3}$$

или

$$\omega_2{}^0\ \rho\cdot\left(\frac{J_1}{R^2}+\frac{J}{r^2}\right)\dot{\rho}=M_2+\frac{\rho}{R}\cdot M_1,$$

$$m\ddot{\rho}=-(F_{11}+F_{22})+u.$$

Первое уравнение системы (3.3) представляет собой условие динамичности, а второе - уравнение движения промежуточного колеса.

Введя обозначения:

$$k = \omega_2^0 \left(J + J_1 \frac{r^2}{R^2} \right), \tag{3.4}$$

$$k_1(t) = r^2 M_2(t), \; k_2(t) = r^2 \cdot \frac{M_1(t)}{R} \;,$$

условия динамичности промежуточного колеса можно написать в виде

$$k\dot{\rho} = \frac{k_1(t)}{\rho} + k_2(t) \;. \tag{3.5}$$

Это уравнение в общем случае не интегрируется в квадратурах и называется уравнением Риккати [32] , Если угловая скорость ω_2^0 достаточно большая, т.е. если в качестве малого параметра [54] принять

$$\varepsilon = \frac{1}{k} = \frac{1}{\omega_2^0 \left(J + J_1 \frac{r^2}{R^2} \right)},$$

то уравнение (3.5) сводится к следующему виду:

$$\dot{\rho} = \varepsilon \left(\frac{k_1(t)}{\rho} + k_2(t) \right). \tag{3.6}$$

Правая часть уравнения (3.6) удовлетворяет всем условиям теоремы Пуанкаре [54], поэтому решение можно искать в виде

$$\rho = \rho_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \rho_i \,, \tag{3.7}$$

где для определения ρ_i будем иметь систему дифференциальных уравнений

$$\rho_o \dot{\rho}_1 = k_1(t) + k_2(t) \cdot \rho_0 \;\; при \;\; i = 1,$$

$$\rho_1 \dot{\rho}_1 + \rho_0 \dot{\rho}_2 = k_2(t) \cdot \rho_1 \;\; при \;\; i = 2,$$

$$\rho_o \dot{\rho}_3 = F(t, \rho_0, \rho_1, \dot{\rho}_1, \rho_2, \dot{\rho}_2) \ \textit{при} \ \ i = 3, \tag{3.8}$$

$$\rho_o \dot{\rho}_n = \Phi(t, \rho_0, \rho_1, \dot{\rho}_1, \rho_2, \dot{\rho}_2, ..., \rho_{n-1}, \dot{\rho}_{n-1}) \ \textit{при} \ \ i = n,$$

с начальными условиями $\rho_0 \neq 0, \qquad \rho_i(0) = 0 \qquad (i = \overline{1, n})$.

Из системы уравнений (3.8) видно, что задача определения закона изменения ρ сводится к квадратурам.

Имея в виду уравнение (3.6) для управляющей силы будем иметь

$$u = m\ddot{\rho} = \frac{m}{k}\frac{d}{dt}\left(\frac{k_1(t)}{\rho} + k_2(t)\right) - (F_{11} + F_{22}), \tag{3.9}$$

или

$$u = \frac{m}{k}\left[\frac{\dot{k}_1\rho - k_1\varepsilon(\frac{k_1(t)}{\rho} + k_2(t))}{\rho^2} - \dot{k}_2\right] - (F_{11} + F_{22}) \cdot$$

Рассмотрим конкретный случай, когда к валам приложены постоянные моменты

$$M_1 = M_1^0, \qquad M_2 = M_2^0 \ .$$

Из (3.4). следует что k_1, k_2 постоянные. В этом случае уравнение (3.5) интегрируется в квадратурах, и решение имеет вид

$$t = \frac{k}{k_2}(\rho - \rho_0 - \frac{k_1}{k_2}\ln\left|\frac{k_2\rho + k_1}{k_2\rho_0 + k_1}\right|), \tag{3.10}$$

где ρ_0 - начальное значение переменной ρ, удовлетворяющее уравнениям связей.

Теперь рассмотрим вопрос устойчивости частного решения уравнения (3.5). Будем предполагать, что момент, приложенный ко второму валу, является ограниченной функцией по времени. Кроме этого, нам известно, что переменная ρ меняется в пределах $0 < \rho < r_2$.

Пусть $\rho_0(t)$ частное решение, которое соответствует начальному условию, удовлетворяющему уравнениям связей (3.2). Если полагать

$$\rho = \rho_0 + \rho', \tag{3.11}$$

то уравнение возмущенного движения примет вид:

$$\dot{\rho}_0 + \dot{\rho}' = \frac{1}{k}\left(\frac{k_1(t)}{\rho_0 + \rho'} + k_2(t)\right) = \frac{k_1'(t)}{\rho_0 + \rho'} + k_2'(t). \tag{3.12}$$

Разлагая правую часть уравнения в ряд в окрестности ρ_0 с учетом уравнения (3.5), будем иметь

$$\dot{\rho}' = -\frac{k_1'(t)}{\rho_0^2}\rho' + R(t, \rho_0, \rho'), \tag{3.13}$$

где $R(t, \rho_0, \rho)$ - члены более высокого порядка.

Уравнение возмущенного движения является нелинейным неавтономным уравнением. Следовательно, вопрос исследования на устойчивость частных движений, на первый взгляд, представляет собой достаточно трудную задачу.

Нетрудно убедиться, что решением уравнения первого приближения будет

$$\rho' = \rho_0' \ \exp\left(-\int_0^t \frac{k_1'(\tau)}{\rho_0^2} d\tau\right).$$

Следовательно, если считать, что имеет место условие $M_2' < M_2 < M_2''$, то вопрос устойчивости решается на основании критерия, установленного К.П. Персидским. Если для уравнения первого приближения (3.13) при любых $t_0 \geq 0$ и $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$\rho(t, t_0) < Be^{-\alpha(t - t_0)},$$

где B и α- положительные постоянные, не зависящие от t_0, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво при любом выборе функций $R(t,\rho')$, удовлетворяющих в области $t>0,\quad |\rho|\le H$ неравенству $|R(t,\rho')|<A|\rho'|$, если только постоянная A достаточно мала.

Действительно, если иметь в виду для ρ' соотношение (3.10), то имеет место равенство

$$/\rho'/=/\rho_0'\ /\exp(-\int_0^t\frac{k_1(\tau)}{\rho_0^2}d\tau)<$$

$$</\rho_0'\ /\exp(-\int_{t_0}^t\frac{r^2M_2'}{k\rho_{0\max}^2}d\tau)=/\rho_0'/\exp(-\alpha(t-t_0)).$$

Так как M_2' положительная функция, то

$$\alpha=\frac{r^2M_2'}{k\rho_{0\max}^2}>0.$$

Если последнее условие выполняется, то уравнение возмущенного движения (3.13) удовлетворяет всем требованиям критерия Персидского и невозмущенное движение асимптотически устойчивое.

Рассмотрим другой тип регулятора скорости (рис.3.3.). В отличие от регулятора, изображенного на рис. 3.2., в данном случае, кроме расстояния ρ, изменяется расстояние до оси вращения первого вала $(a-\rho)$.

Проделав аналогичные выкладки, можно получить уравнения движения для регулятора, изображенного на рис.3.3.

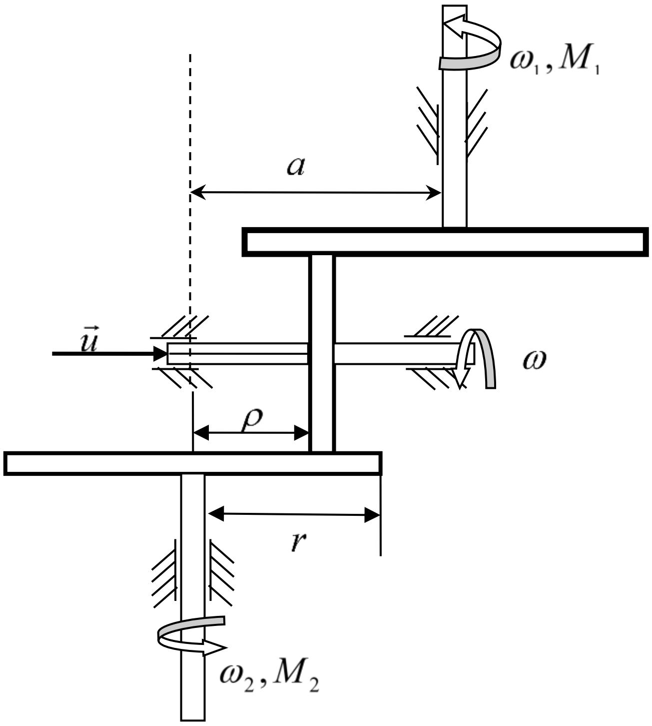

рис .3.3. Регулятор скорости с изменяющимся расстоянием

до оси вращения первого вала.

Действительно, для угловых скоростей $\omega_1, \omega, \omega_2^0$ имеет место соотношение

$$r\omega = \rho_1\omega_1 = (a - \rho_1)\omega_2^0,$$

или

$$\omega = \frac{a-\rho_1}{r}\omega_2^0, \ \dot{\omega} = -\frac{\omega_2^0}{r}\dot{\rho}_1,$$

$$\omega_1 = \omega_2^0 \frac{a-\rho_1}{\rho_1},$$

$$\dot{\omega}_1 = \omega_2^0 \frac{-\dot{\rho}_1\rho_1 - (a-\rho_1)\dot{\rho}_1}{\rho_1^2} = -\omega_2^0 \frac{a\dot{\rho}_1}{\rho_1^2}.$$

С учетом этих соотношений для поперечных сил трения будем иметь

$$-\omega_2^0 \frac{a\dot{\rho}_1}{\rho_1^2} J_1 = M_1^0 - F_1\rho_1,$$

$$J\dot{\omega} = -J\frac{\dot{\rho}_1}{r}\omega_2^0 = -\frac{J\omega_2^0}{2}\dot{\rho}_1 = r(F_1 + F_2),$$

$$0 = M_2 - F_2(a - \rho_1),$$

откуда определим следующие соотношения

$$F_2 = \frac{M_2}{(a-\rho_1)},\ F_1 = \frac{M_1^0}{\rho_1} + \omega_2^0 \frac{a\dot{\rho}_1}{\rho_1^3} J_1.$$

Здесь F_1 и F_2-продольные составляющие сил трения в контакте.

Исключая F_2 и F_1 , получим уравнение для определения ρ

$$\frac{J\omega_2^0}{r}\dot{\rho}_1 = r\left(\frac{M_2}{(a-\rho_1)} + \frac{M_1^0}{\rho_1} - \omega_2^0 \frac{aJ_1}{\rho_1^3}\dot{\rho}_1\right) \Rightarrow$$

или

$$\Rightarrow \left(\frac{J\omega_2^0}{r} + \omega_2^0 \frac{arJ_1}{\rho^3}\right)\dot{\rho}_1 = r\left(\frac{M_2}{(a-\rho_1)} + \frac{M_1^0}{\rho_1}\right).$$

Для управляющей силы u будем иметь уравнение, аналогичное тому, которое получено для регулятора, изображенного на рис.3.3.,

$$m\ddot{\rho}_1 = u + f(N_1 + N_2),$$

где N_1, N_2- силы нормального давления.

Рассмотрим фрикционный редуктор, изображенный на рис.3.1 Предположим, что промежуточное колесо представляет собой твердый диск с упругой периферией. Выясним влияние упругости промежуточного колеса на устойчивость частного (стационарного) движения этого редуктора скорости (рис.3.1). При этом массой деформируемой части будем пренебрегать.

Энергия ускорений будет такой же, как в твердом случае, [46] то есть

$$S = \frac{1}{2}\dot{\omega}_1\left[J_{2.}\cdot\frac{r_1^2}{(x-c)^2} + J_1 + J\frac{r_1^2}{r^2} + \frac{1}{2}m_{гр}(4\cdot l^2 - x^2)\right] - \dot{\omega}_1\cdot\omega_1\cdot\dot{x}\left(\frac{J_2\cdot r_1^2}{(x-c)^3} + m_{гр}\cdot x\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\ddot{x}^2\left(m_{гр} + \frac{2\cdot m_{гр}\cdot l^2}{4\cdot l^2 - x^2}\right) + m_{гр}\cdot\ddot{x}\cdot\dot{x}\left(\frac{1}{2}\cdot\omega^2 + \frac{2\cdot l^2\cdot x^2}{\left(4\cdot l^2 - x^2\right)^2}\right),$$

(3.14)

где величины l, x-указаны на рис. 3.1.

Переменные $x,\ \rho$ связаны между собой соотношением

$$x - \rho = c, \tag{3.15}$$

где c является постоянной.

Будем считать, что проскальзывание площадки контакта в продольном и в поперечном направлениях отсутствует.

Уравнения связей с учетом поперечной деформации и поворота оси площадки контакта примут следующий вид [35, 83].:

$$\dot{x} - \dot{\lambda} = R\cdot\psi_1\cdot\dot{\varphi}_1,$$

$$R\omega_1 = \rho\omega_2,$$

$$\dot{\psi}_1 = (\alpha\cdot\lambda - \beta\cdot\psi)\cdot R\cdot\dot{\varphi}_1. \tag{3.16}$$

где $\alpha,\ \beta$-коэффициенты пропорциональности.

В (3.16) первые два уравнения представляют собой условия отсутствия проскальзывания центра контакта в продольном и поперечном направлениях (модель качения упругого колеса М. В. Келдыша), а третье уравнение связывает радиус кривизны линии качения с параметрами деформации λ и ψ, где λ - поперечная составляющая смещения центра колеса, ψ_1 - угол между касательной линией качения и плоскостью промежуточного колеса.

Для элементарных работ активных сил имеем

$$\delta A_{\varphi 1} = \left(M_1 + \frac{R}{x-c} \cdot M_2 \right) \delta\varphi_1 + b \cdot \psi \cdot \delta\varphi_2 + b \cdot \psi \cdot \delta\psi =$$

$$= \left(M_1 + \frac{R}{x-c} \cdot M_2 - b \cdot \psi \cdot \frac{R}{x-c} + b \cdot \psi \cdot R \ (\alpha\lambda - \beta \cdot \psi) \right) \cdot \delta\varphi_1 = Q_{\varphi 1} \cdot \delta\varphi_1,$$

$$\delta A_x = \left(-(c_1 + c_2)(x - x_0) - c_1\delta_1 + c_2\delta_2 \right) \delta x + a \cdot \lambda \delta\lambda =$$

$$= (-(c_1 + c_2)(x - x_0) - c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + a \cdot \lambda) \delta x.$$

Дифференциальные уравнения движения принимают вид:

$$\theta(x) \cdot \dot{\omega}_1 + F(x) \cdot \dot{x} \cdot \omega_1 = M_1 + \frac{R}{x-c} \cdot M_2 + b\psi(R(\alpha \cdot \lambda - \beta \cdot \psi) - 1),$$

$$m(x)\ddot{x} + \frac{1}{2} m_{гр} \cdot x \cdot \omega_1^{\ 2} + \frac{2 \cdot l^2 \cdot x}{(4 \cdot l^2 - x^2)^2} \cdot m_{гр} \cdot \dot{x}^2 = -(c_1 + c_2) \cdot (x - x_0) - c_1\delta_1 + c_2 \cdot \delta_2 + a\lambda,$$

$$\dot{x} - \dot{\lambda} = R \cdot \omega_1 \cdot \psi, \tag{3.17}$$

$$\dot{\psi} = (\alpha \cdot \lambda - \beta \cdot \psi) \cdot R \cdot \omega_1,$$

где δ_1, δ_2 - натяжения пружин в стационарном движении;

$a, b -$ коэффициенты пропорциональности;

$$\theta(x) = J_{2\cdot} \cdot \frac{r_1^{\ 2}}{(x-c)^2} + J_1 + J\frac{r_1^{\ 2}}{r^2} + \frac{1}{2} m_{гр} (4 \cdot l^2 - x^2); \qquad F(x) = \frac{J_2 \cdot r_1^{\ 2}}{(x-c)^2} + m_{гр} \cdot x;$$

$$m(x) = m_{гр} + \frac{2 \cdot m_{гр} \cdot l^2}{4 \cdot l^2 - x^2}.$$

Частное решение дифференциальных уравнений регулятора скорости получим, полагая в (3.17)

$$\omega_1 = \omega_1^0\ ,\ x = x_0\ ,\ \lambda = \psi = 0. \qquad (3.18)$$

Подставляя (3.18) в (3.17) получим

$$M_1 + \frac{R}{x_0 - c} \cdot M_2 = 0, \qquad (3.19)$$

$$\frac{1}{2} m_{гр} \cdot x_0 \cdot (\omega_1^{\ 0})^2 = -c_1\delta_1 + c_2 \cdot \delta_2 .$$

Соотношения (3.19) представляют собой условия осуществимости частного решения (3.18). Рассмотрим уравнения движения в окрестности частного движения. При этом уравнения первого приближения примут вид:

$$\theta(x_0) \cdot \dot{\omega}^1_{\ 1} + F(x_0) \cdot \dot{x}' \cdot \omega^0_{\ 1} + \frac{r_1}{(x-c)^2} \cdot M_2 \cdot x' - b\psi_1 = 0, \qquad (3.20)$$

$$m(x_0)\, \ddot{x}' + \frac{1}{2} m_{гр} \cdot x' (\omega_1^0)^2 + 2 \cdot x_0 \cdot \omega_1^0 \cdot \omega_1^1 + (c_1 + c_2) \cdot x' - a\lambda = 0,$$

$$\dot{x}' - \dot{\lambda} - r_1 \cdot \omega_1^o \cdot \psi = 0,$$

$$\dot{\psi} - r_1 \cdot \omega^0_{\ 1} \cdot \alpha \cdot \dot{\lambda} + r_1 \cdot \omega^0_{\ 1} \cdot \beta \cdot \psi = 0. \qquad (3.21)$$

Характеристическое уравнение линейного приближения имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \theta(x_0) \cdot \mu & F(x_0) \cdot \mu \cdot \omega^0_{\ 1} + \frac{r_1}{\rho_0^{\ 2}} \cdot M_2 & 0 & -b \\ m_{гр} \cdot x_0 \cdot \omega_1^{\ 0} & m(x_0) \cdot \mu^2 + (\frac{1}{2} m_{гр} \cdot (\omega_1^{\ 0})^2 + c_1 + c_2) & -a & 0 \\ 0 & \mu & -\mu & -V_0 \\ 0 & 0 & -V_0 \cdot \alpha & \mu + V_0 \cdot \beta \end{vmatrix} = 0 \quad (3.22)$$

или

$$\theta(x_0)\cdot m_0\cdot\mu^5-\theta(x_0)\cdot m_0\cdot\beta_1\cdot\mu^4+\mu^3(\theta(x_0)\cdot m_0\cdot\alpha_1\cdot V_0+\Phi_3\Phi_1-\Phi_4\cdot\theta(x_0)-a\cdot\theta(x_0))+$$
$$\mu^2(\beta_1(\Phi_3\Phi_1-\Phi_4\cdot\theta(x_0)-a\cdot\theta(x_0))+\Phi_3\Phi_2)+\mu(\beta_1\cdot\Phi_3\cdot\Phi_2-\alpha_1\cdot(V_0(\Phi_3\Phi_1-\Phi_4\cdot\theta(x_0))-$$
$$-b\cdot\Phi_3))-\alpha_1\cdot V_0\cdot\Phi_3\cdot\Phi_2=0$$

где введены обозначения

$$Z=-\Phi_3\Phi_1+\Phi_4\cdot\theta(x_0)+a\cdot\theta(x_0),$$

$$\varPhi_1=F(x_0)\cdot\omega_1^0,\ \varPhi_2=\frac{r_1}{\rho_0^2}M_2\ ,\ \varPhi_3=m_{гр}\cdot x_0\cdot\omega_1^0,\ \varPhi_1=\frac{1}{2}m_{гр}\cdot(\omega_1^0)^2+C_1+C_2,$$
$$\beta_1=V_0\cdot\beta,\ \ \alpha_1=V_0\cdot\alpha,\ \ m(x_0)=m_0.$$

Достаточные условия устойчивости частного решения будут следующими (критерий Гурвица), то есть главные диагональные миноры матрицы

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0\\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0\\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0\\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0\\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5\end{matrix}\right| =0,$$

должны быть положительными , где

$$a_0=\theta(x_0)\cdot m_{гр},\quad a_1=\theta(x_0)\cdot m_{гр}\cdot\beta_1,\ a_2=Z-\theta(x_0)\cdot m_{гр}\cdot\alpha_1\cdot V_0$$

$$a_3=\beta_1\cdot Z-\Phi_3\cdot\Phi_2,\ a_4=\Phi_3(b\cdot\alpha_1-\beta_1\Phi_2)+\alpha_1\cdot V_0(a\cdot\theta(x_0)-Z),$$
$$a_5=\alpha_1\cdot V_0\cdot\Phi_3\cdot\Phi_2.$$

Таким образом, условия устойчивости по первому приближению будут следующими

$$\Delta_1=a_1=\theta(x_0)\cdot m_0>0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \theta(x_0)\cdot m_0 \cdot (\Phi_3 \cdot \Phi_2 - \theta(x_0)\cdot m_0 \cdot \alpha_1 \cdot V_0 \cdot \beta_1 \cdot V_0)\cdot > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \Phi_3(b\cdot\alpha_1 - \beta_1\Phi_2) + \alpha_1 \cdot V_0(a\cdot\theta(x_0) - Z)\times$$

$$\times(\Phi_3\Phi_2(2\cdot m_0^2 \cdot \beta_1 \cdot \alpha_1 \cdot \theta^2 \cdot V_0 + m_0 \cdot \theta \cdot \beta_1 \cdot Z - m_0 \cdot \theta \cdot \Phi_3 \cdot \Phi_2 + \beta_1^3 \cdot m_0^2 \cdot \theta^2) -$$

$$-\alpha_1 \cdot \beta_1^2 \cdot m_0^2 \cdot \theta^2 \cdot (b\cdot \Phi_3 + V_0 \cdot a\cdot \theta)) - \alpha_1 \cdot V_0 \cdot \Phi_3 \cdot \Phi_2(\theta(x_0)\cdot m_0 \cdot \Phi_3 \cdot \Phi_2(Z + \theta(x_0)\cdot m_0) +$$

$$+\theta^2(x_0)\cdot m^2{}_0 \cdot \beta_1 \cdot \alpha_1(-\Phi_3 b - \cdot V_0(a\cdot\theta(x_0)) > 0,$$

$$\Delta_5 = a_5 = \alpha_1 \cdot V_0 \cdot \Phi_3 \cdot \Phi_2 > 0$$

Из полученных соотношений видно, что условия устойчивости частного движения редуктора включают в себя кинематические и динамические параметры редуктора и промежуточного колеса.

Таким образом, при постановке задачи с упругой периферией условия устойчивости стационарного движения регулятора оказываются совсем другими, чем в случае твердого промежуточного колеса. При этом регулирование скорости осуществляется за счет упругих перемещений промежуточного колеса.

3.2. Оптимальная стабилизация частных движений фрикционного регулятора скорости при неточном выполнении условной связи

Н.Г. Четаевым был предложен алгоритм освобождения от связей - параметрическое освобождение материальных систем. Освобождением системы называется всякое её преобразование, которое, не сужая многообразия допустимых состояний, делает систему в каждом её состоянии более свободной. Система в каждый момент становится более свободной, если в этом её состоянии расширяется её многообразие ускорений, которые она может получить в действительном движении. При таком расширении все состояния и ускорения, допускаемые для несвободной системы, считаются допустимыми и для системы освобожденной.

Пусть имеется система, положение которой определяется координатами $x_1, x_2, ..., x_n$.

Пусть на такую систему наложены совместимые связи

$$f_\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad \alpha = 1, ..., a,$$

$$\varphi_\beta(x_1, x_2, ..., x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, ... \dot{x}_n, t) = 0 \quad \beta = 1, 2, ..., b.$$

Если ввести обобщенные координаты $q_1, q_2, ..., q_k \, (k = n - a)$, то многообразие допустимых состояний можно представить в виде

$$x_i = a_i(q_1, q_2, ..., q_k),$$

$$\dot{x}_i = b_i(q_1, q_2, ..., q_k, p_1, p_2, ... p_s, t) \quad s = n - a - b, \tag{3.23}$$

где $p_1, p_2, ... p_s$ - независимые скоростные параметры.

Для параметрически освобожденной системы можем написать

$$x_i = a_i'(Q_1, Q_2, ..., Q_{k'}, t),$$

$$\dot{x}_i = b_i'(Q_1, Q_2, ..., Q_k, P_1, P_2, ...P_{s'}, t) \ ,$$

где Q_k – Лагранжевы координаты, P_S – независимые скоростные параметры.

Причем, согласно определению

$$k' > k, \ \ s' > s \,,$$

так как для освобожденной системы должны быть допустимы все состояния неосвобожденной системы. Поэтому для любой системы значений $q_1', q_2', ..., q_k', \ \ p_1', p_2', ...p_s'$ в любой момент времени существует система значений $Q_1', Q_2', ..., Q_{k'}', P_1', P_2', ...P_{s'}'$, при которых выполняются равенства

$$a_i(q_1', q_2', ..., q_k') = a_i'(Q_1', Q_2', ..., Q_{k'}', t), \ b_i(q_1', q_2', ..., q_k', p_1', p_2', ...p_s', t)$$
$$= b_i'(Q_1', Q_2', ..., Q_k', P_1', P_2', ...P_{s'}', t) \ .$$

Следуя алгоритму освобождения, изложенному выше, для условной связи (3.1) будем иметь

$$\omega_2 = \omega_2^0 + \zeta \,, \tag{3.24}$$

$$\dot{\zeta} = \xi \,,$$

где ζ - параметр, представляющий отклонение от условной связи.

Соответственно пассивные связи также преобразуются, и будут иметь вид

$$R \cdot \omega_1 = \rho(\omega_2^0 + \zeta) \,,$$

$$r\omega = \rho(\omega_2^0 + \zeta) \,,$$

что соответствует определению параметрического освобождения.

Для составления дифференциальных уравнений движения регулятора воспользуемся уравнениями в форме Аппеля.

Энергия ускорений регулятора

$$S = \frac{1}{2}(J_1\dot{\omega}_1^2 + J\dot{\omega}^2 + m\ddot{\rho}^2 + J_2\dot{\omega}_2^2) + ..,$$

с учетом уравнений связей имеет следующий вид

$$S' = \frac{1}{2}(\frac{J_1}{R^2} + \frac{J}{r^2})(\dot{\zeta}\rho + (\zeta + \omega_2^0)\dot{\rho})^2 + \frac{1}{2}m\ddot{\rho}^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\zeta}^2). \qquad (3.25)$$

Обобщенные силы, соответствующие переменным ζ, ρ, будут следующими

$$\delta A_\rho = -(F_{11} + F_{22})\delta\rho + (u + u_1)\delta\rho = (-(F_{11} + F_{22}) + u + u_1)\delta\rho = Q'_\rho\delta\rho,$$

$$\delta A_\zeta = M_2\delta\varphi_2 + M_1\delta\varphi_1 = (M_2 + \frac{\rho}{R}M_1)\delta\xi = Q'_\xi\delta\xi.$$

Таким образом, уравнения Аппеля для данной задачи

$$\frac{\partial S'}{\partial\dot{\zeta}} = Q'_\xi,$$
$$\frac{\partial S'}{\partial\ddot{\rho}} = Q'_\rho,$$

в явной форме можно записать следующим образом

$$\left(n\rho_0^2 + J_2\right)\dot{\zeta} + n\left(\zeta + \omega_2^0\right)\dot{\rho}\rho = M_2 + \frac{\rho}{R}\cdot M_1,$$

$$m\ddot{\rho} = F_1 + F_2 + u + u_1, \qquad (3.26)$$

где $n = \frac{J_1}{R^2} + \frac{J}{r^2}$, u_1-отклонение управляющей силы от программного значения.

Учитывая, что $\rho = \rho_0 + \rho'$, имеем

$$(n\rho^2 + J_2)\dot{\zeta} + n(\zeta + \omega_2^0)(\rho_0 + \rho')\dot{\rho} = M_2 + \frac{\rho}{R}M_1, \qquad (3.27)$$

$$m\ddot{\rho} = -(F_{11} + F_{22}) + u + u_1.$$

Система уравнений (3.27) представляет собой уравнения параметрически освобожденной системы в окрестности многообразия, определяемого условной связью, с учетом неточного выполнения условной связи.

Рассмотрим вопрос оптимальной стабилизации программного движения редуктора в окрестности многообразия, определяемого условной связью. Как известно, такая задача сводится к определению функции Ляпунова (если система управляема) в виде квадратичной формы, имеющей бесконечный малый высший предел.

Так как уравнения движения (3.27) представляют собой неавтономную систему, то функция Ляпунова также будет зависеть от времени.

Разлагая правые части системы уравнений (3.27) в окрестности $\rho = \rho(t), \quad \zeta = 0$ в ряд получим уравнения первого приближения

$$(n\rho_0^2 + J_3)\dot{\zeta} + n\dot{\rho}_0\rho_0\zeta + n\rho_0\omega_2^0\dot{\rho}' + n\omega_2^0\dot{\rho}_0\rho' = \frac{M_1}{R}\rho', \tag{3.28}$$

$$m\ddot{\rho}' = u_1.$$

В нормальной форме эти уравнения примут вид

$$(n\rho_0^2 + J_3)\dot{\zeta} = -n\dot{\rho}_0\rho_0\zeta - n\rho_0\omega_2^0 z + (\frac{M_1}{R} - n\omega_2^0\dot{\rho}_0)\rho', \tag{3.29}$$

$$\dot{\rho}' = z,$$
$$m\dot{z} = u_1.$$

В рассматриваемом случае важную роль играет матрица W, построенная следующим образом [45, 47]

$$W(t) = \{L_1(t), ..., L_n(t)\}. \tag{3.30}$$

Здесь $L_k(t)$ -матрицы, определяемые рекуррентными соотношениями

$$L_1(t)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \ldots,\ L_{i+1}(t)=\frac{dL_i(t)}{dt}-P(t)\cdot L_i(t)\ . \qquad (3.31)$$

Для компонентов матрицы W имеем

$$\dot{L}_1(t)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$L_2(t)=-\begin{pmatrix}-n\cdot\rho_0\cdot\dot{\rho}_0 & S_1 & -n\cdot\omega_2^0\cdot\rho_0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n\cdot\omega_2^0\cdot\rho_0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$L_2(t)=\begin{pmatrix}n\cdot\omega_2^0\cdot\dot{\rho}_0\\0\\0\end{pmatrix},\ L_3(t)=\dot{L}_2(t)-P\cdot L_2(t),$$

$$P\cdot L_2=\begin{pmatrix}-n\cdot\rho_0\cdot\dot{\rho}_0 & S_1 & -n\cdot\omega_2^0\cdot\rho_0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}n\cdot\omega_2^0\cdot\rho_0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-n^2\cdot\rho_0^2\cdot\omega_2^0\cdot\dot{\rho}_0-S_1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$L_3(t)=\begin{pmatrix}n\cdot\omega_2^0\cdot\dot{\rho}_0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n^2\cdot\rho_0^2\cdot\omega_2^0\cdot\dot{\rho}_0+S_1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\rho}_0\cdot n\cdot\omega_2^0(1+n\cdot\rho_0^2)+S_1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\mu_1}{r}+n^2\cdot\omega_2^0\cdot\rho_0^2\cdot\dot{\rho}_0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$W=\begin{pmatrix}0 & n\cdot\omega_2^0\cdot\dot{\rho}_0 & \frac{\mu_1}{r}\cdot n^2\cdot\omega_2^0\cdot\rho_0^2\cdot\dot{\rho}_0\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}. \qquad (3.32)$$

Ранг матрицы W равен порядку системы, так как $w = \rho_0{}^2 \dot{\rho}_0 \omega_2^0 \neq 0$. Значит, система управляема по первому приближению. Следовательно, данная задача имеет решение.

В качестве критерия оптимальности возьмём интеграл

$$I = \int_0^{\infty} (\zeta^2 + \rho'^2 + z^2 + u_1^2) dt. \tag{3.33}$$

Тогда, уравнения в нормальной форме (3.28) примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \dfrac{1}{(n\rho_c^2 + J^2)}(-n\rho_0 \cdot n\dot{\rho}_0 \xi - n\omega_2^0 \cdot \rho_0 z + S_1 \rho^{'}), \\ \dot{\rho}' = z, \\ m\dot{z} = u_1. \end{cases} \tag{3.34}$$

$$n_1 = \frac{n}{\omega \cdot \rho_0^2 + J^2}, \qquad S'_1 = \frac{\dfrac{M_1}{R} - n\omega_2^0 \dot{\rho}_0}{n\rho_0^2 + J_2}.$$

Для решения задачи оптимальной стабилизации необходимо построить функцию Ляпунова.

Согласно теории функцию Ляпунова будем искать в виде:

$$V = C_{11}\xi^2 + C_{22} \cdot z^2 + C_{33}\rho'^2 + 2C_{12} \cdot \xi \cdot z + C_{23}\rho' z. \tag{3.35}$$

Составим функцию Беллмана [47]

$$B[V, t, \xi, z, \rho', u] = \dot{C}_{11}\xi^2 + \dot{C}_{22}z^2 + C_{33}\rho'^2 + 2C_{12}\xi \cdot z + 2C_{13}\xi z + \dot{C}_{23}\rho' z +$$

$$+ (2C_{11}\xi + 2C_{12}\rho' + 2C_{13}z) \cdot (-n_1\rho\rho_0\xi - n_1\omega_2^0 \cdot \rho z + S'\rho') + (2C_{22}z) + 2C_{13}\xi + 2C_{23}\rho') \cdot$$

$$\cdot U_1 + (2C_{33}\rho' + 2C_{12}\xi + 2C_{23}z) \cdot z + \xi^2 + z^2 + \rho'^2 + u_1^2$$

$$\frac{dB}{dU_1} = 2u_1 + 2C_{22}z + 2C_{13}\xi + 2C_{23}\rho' = 0.$$

Далее составим уравнения для определения коэффициентов функции Ляпунова

$$\begin{cases} \dot{C}_{11} = 2\cdot C_{11}\cdot n_1\cdot \rho\cdot \dot{\rho}_0 + C_{13}^2 - 1, \\ C_{22} = 2\cdot C_{13}\cdot n_1\cdot \omega_2^0\cdot \rho_0 + C_{22}^2 - 2\cdot C_{23} - 1, \\ \dot{C}_{33} = -2\cdot C_{12}\cdot S' + C_{23}^2 - 1, \\ \dot{C}_{13} = u_1\cdot \omega_2^0\cdot \rho_0\cdot C_{11} + C_{13}\cdot u_1\cdot \rho_0\cdot \dot{\rho}_0 + 2\cdot C_{13}\cdot C_{22} - 2\cdot C_{12}, \\ \dot{C}_{12} = -C_{11}\cdot S' + C_{12}\cdot u_1\cdot \rho_0\cdot \dot{\rho}_0 + 2\cdot C_{13}\cdot C_{23}, \\ \dot{C}_{23} = u_1\cdot \omega_2^0\cdot \rho_0\cdot C_{12} - S'\cdot C_{13} + 2\cdot C_{22}\cdot C_{23}, \end{cases} \tag{3.36}$$

где $n_1 = \dfrac{n}{n\rho_0^2 + J_2}$,

с начальными условиями

$$c_{ij}(0) = 0.$$

Искомое оптимальное управление u_1 находится по формуле

$$u_1 = -(c_{33}z + c_{13}\zeta + c_{23}\rho'). \tag{3.37}$$

Таким образом, если удастся найти частное решение уравнения (3.27), то вопрос стабилизации движений в окрестности состояний, допускаемой условной связью, решается вышеизложенным алгоритмом.

В последней главе исследованы движения трех типов фрикционных регуляторов скорости. В отличие от работ [46, 11], на регуляторы, кроме пассивных кинематических связей, которые реализуются с помощью сил Кулонова трения, накладывается условная связь в виде постоянства угловой скорости приемного вала.

С помощью аксиомы освобождения от связей получено уравнение для определения закона движения промежуточного вала, а также явный вид управляющей силы. Полученное уравнение для промежуточного вала в случае регулятора, изображенного на рисунке 3.2., в общем случае представляет собой нелинейное неавтономное уравнение первого порядка и не интегрируется в общем случае.

Несмотря на это, в следующих частных случаях получено решение для уравнения промежуточного вала:

1. Угловая скорость приемного вала достаточно велика, т. е. в качестве малого параметра можно принимать $\varepsilon = \frac{1}{\omega_2^0}$ и с помощью метода малого параметра Пуанкаре можно построить решение.
2. Момент, приложенный к приемному валу, постоянен.

Также рассмотрен вопрос влияния упругости промежуточного колеса на устойчивость установившегося движения регулятора скорости. Получены соотношения, при выполнении которых имеет место устойчивость частного движения регулятора. При этом учет упругости осуществляется с помощью дискретной модели качения (модель М.В.Келдыша).

Следуя алгоритму освобождения от условных связей, рассмотрен вопрос оптимальной стабилизации программного движения регулятора скорости в окрестности многообразия, определяемого условной связью. Аналитические выкладки показали, что система управляема, и можно построить функцию Ляпунова, которая решает вопрос оптимальной стабилизации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной монографии дан единый подход к исследованию широкого круга задач механики голономных и неголономных систем с неидеальными связями на основе расширенного метода комбинирования связей. Получены следующие основные результаты:

1. Дано расширение метода комбинирования связей на основе введения особого типа возможных перемещений, снимающее ограничения на инерционные члены системы.
2. Показано, что расширенный метод комбинирования связей позволяет определить закон трения системы и составляющие сил связей, не зависящие от сил трения, при произвольных инерционных свойствах системы.
3. Показано, что расширенный метод комбинирования связей даёт возможность составить дифференциальные уравнения движения механических систем с неидеальными связями, в которых силы связей не зависят от сил трения.
4. Получены дифференциальные уравнения движения голономных систем с неидеальными связями в форме уравнений Лагранжа первого и второго родов и уравнений М.Ф.Шульгина в избыточных координатах.
5. На конкретных примерах (обобщенные задачи Пенлеве и Аппеля) показаны методика составления дифференциальных уравнений движения для систем с геометрическими неидеальными и с условными связями и методика определения сил связей и закона трения системы.
6. Дано распространение расширенного метода комбинирования связей на неголономные системы с неидеальными связями. Показано, что для таких систем имеет место общее уравнение динамики.
7. Дано обобщение принципа наименьшего принуждения Гаусса для неголономных систем с неидеальными связями в случае , когда возможные

перемещения удовлетворяют условиям расширенного метода комбинирования связей.

8. Исследованы движения управляемых фрикционных регуляторов скорости, на которые, кроме пассивных кинематических связей, наложена неидеальная условная связь в виде постоянства угловой скорости приёмного вала.

9. Составлены дифференциальные уравнения движения управляемого фрикционного регулятора скорости в форме уравнений Аппеля.

10. Найден явный вид управляющей силы, реализующей условную связь, наложенную на фрикционный регулятор скорости.

11. В случае ограниченного значения момента внешних сил, приложенного к приёмному валу регулятора скорости, найдены условия асимптотической устойчивости движения промежуточного колеса.

12. Показано, что при постановке задачи с упругой периферией промежуточного колеса регулирование скорости регулятором осуществляется за счет упругих перемещений промежуточного колеса. Найдены условия устойчивости по первому приближению одного из частных движений в этом случае.

13. Получены дифференциальные уравнения регулятора скорости как параметрически освобожденной системы в окрестности многообразия, определяемого условной связью. Показано, что система управляемая по первому приближению.

14. Составлены уравнения для определения коэффициентов функции Ляпунова, которая решает вопрос оптимальной стабилизации программных движений регулятора скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каримов И.А. Мировой финансово-экономический кризис, пути и меры по его преодолению в условиях Узбекистана. – Ташкент, 2009. – 48 с.

2. Абдулин Р.Н. Об устойчивости стационарных движений неголономных систем // Науч. тр. ТашГУ. –Ташкент, 1980. –вып. 621. –с. 3-7.

3. Абдулин Р.Н. О размерности воздействия, стабилизирующего состояния равновесия неголономной системы // ДАН УзССР. –Ташкент, 1981. –№ 2. –С.7-8.

4. Абдулин Р.Н. О стабилизации стационарного движения неголономной системы // Науч. тр. ТашГУ. –Ташкент, 1982. –вып.683. –с.3-6.

5. Агафонов С.А. Об устойчивости и стабилизации для консервативных механических систем // ПММ. –М.: Наука, 2010. Т. 74. –вып.4. –С. 560-567.

6. Азизов А.Г. Импульсивное движение систем с сервосвязями. // Сб. «Проблемы аналитической механики, теории устойчивости и управления механики». –М.: Наука, 1975. – С.33-38.

7. Азизов А.Г. О некоторых дифференциальных уравнениях динамики сервосистем // Науч. тр. ТашГУ. – Ташкент, 1971. – вып. 397. – с. 10-17.

8. Азизов А.Г., Манглиева Ж.Х. О движении механических систем с неидеальными связями // Узб. журнал «Проблемы механики». – Ташкент, 1996. – №5. – С. 6-9.

9. Азизов А.Г., Манглиева Ж.Х. Об уравнениях движения систем с трением // Узб. журнал «Проблемы механики» – Ташкент, 1997. – №6. – С.3-7.

10. Азизов А.Г. К динамике систем, стесненных сервосвязями // Науч. тр. ТашГУ. – Ташкент, 1971. – вып. 397 –с. 3-9.

11. Азизов А.Г., Зиятдинов Р.М. О математическом моделировании агрегатов, содержащих вариатор скорости // Проблемы машиностроения и надежности машин. – Москва, 1993. – № 5. – С. 21-26.

12. Азизов А.Г. О движении одной управляемой системы переменной массы // ПММ. – М.: Наука, 1986. Т. 50. – вып. 4. – С. 567-572.

13. Азизов А.Г. О движении управляемых механических систем с сервосвязями // ПММ. – М.: Наука, 1990. Т. 54. – вып. 3. – С. 366 – 372.

14. Азизов А.Г. Прикладные задачи динамики управляемых систем. Учеб. пособие для ВУЗов. – Ташкент: ТашГУ, 1980. – 28 с.

15. Азизов А.Г., Манглиева Ж.Х. О методах аналитической динамики систем с неидеальными связями // Тезисы докладов Республиканской научной конференции по механике, посвященной 90–летию акад. М.Т. Уразбаева. – Ташкент, 1996. – С. 13-14.

16. Азизов А.Г., Хусанов К. О стабилизации движения систем с сервосвязями // Известия АН УзССР. Сер. техн. наук. 1989, –№5. –с. 62-65.

17. Азизов А.Г.,Тешаев М.Х. О реализации сервосвязей электро-магнитными силами // Известия АН Уз ССР. Сер. Тех. наук. 1991, –№ 2. –с. 57-60.

18. Акмухаммедов А. Дифференциальные уравнения движения сервосистем в квазикоординатах // Науч. тр. ТашГУ. –Ташкент, 1973. – вып. 455 –с. 7-10.

19. Александров А.Ю., Косов А.А. Об устойчивости стабилизации нелинейных нестационарных механических систем // ПММ. – М.: Наука, 2010. Т. 74. – вып.5. – С . 774-788.

20. Анаркулов Т.С. Об обобщенных реакциях неидеальных связей // ДАН УзССР. – 1974. –№ 2. – С. 12-14.

21. Анаркулов Т.С. Расширенные уравнения движения систем с неидеальными связями. // ДАН УзССР.- 1974.-№ 6. -С.9-11.

22. Аппель П. Теоретическая механика. Пер. с франц. – М.: Физматгиз, 1960. Т. II – 488 с.

23. Беген А. Теория гироскопических компасов. Пер. с франц. – М.: Наука, 1967. –192 с.

24. Бегматов А., Коршунова Н.А., Хамидов А.А., Маматкулов Ш.М. О развитии механики в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека // Материалы совместной конференции «Инструменты и методы» и «История математики в Узбекистане». – Самарканд, 2002. – С. 41-54.

25. Вильке В.Г. Об анизатропном сухом трении и неудерживающих неголономных связях // ПММ. –М.: Наука, 2008. Т. 72. –вып.1. – С. 3-13.

26. Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. Построение систем программного движения. –М.: Наука, 1971. –372 с.

27. Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики. – М.: Наука, 1981. – 143 с.

28. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966. – 300 с.

29. Зекович Д.Н Анализ движения одной механической неголономной системы // ПММ. – М.: Наука, 2008. Т. 72. –вып.5, – С. 721-726.

30. Зотов Ю.К. Линейная стабилизация программных движений нелинейных управляемых динамических систем при наличии параметрических возмущений // ПММ. – М.: Наука, 2008. Т. 72. – вып.4. – С. 557-580.

31. Иванов А.П. Об устойчивости равновесия в системах с трением // ПММ. – М.: 2007. Т. 71. – вып. 3. – С. 427-438.

32. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 703 с.

33. Карапетян А.В. Двухпараметрическая модель трения. // ПММ. – М.: Наука, 2009. Т. 73. – вып. 4. – С. 515-520.

34. Каюмов О.Р. Параметрическая управляемость некоторых систем твердых тел // ПММ. – М.: Наука, 2006. Т. 70. – вып. 4. – С. 581-587.

35. Келдыш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси // Труды ЦАГИ. – 1945. – №584. –С. 1-33.

36. Кириллов О.Н., Сайранян А.П. Влияние малого внутреннего и внешнего трения на устойчивость распределенных неконсервативных систем // ПММ. – М.: 2005. Т. 69. – вып. 4. – С. 584-612.

37. Киргетов В. И. Об освобождении материальных систем // ПММ. –М.: Наука, 1960. Т. 24. – вып.1. –С. 39-46.

38. Киргетов В. И. О кинематически управляемых механических системах // ПММ. – М.: Наука, 1964. Т.28. – вып.1. – С. 15-24.

39. Киргетов В. И. Об уравнениях движения управляемых механических систем // ПММ. – М.: Наука, 1964. Т.28. –вып. 2. – С. 232-241.

40. Киргетов В.И. О движении управляемых механических систем с условными связями (сервосвязями) // ПММ. –М.: Наука, 1967. Т.31. – вып.3. – С. 433-446.

41. Козлов В.В. Принципы динамики и сервосвязи // Вест. Моск. ун-та. Сер.1. Матем. Механ. 1989. –№5. – С. 59-66.

42. Козлов В.В. Связи и их реализация // Вест. Моск. ун-та. Сер.1. Матем. Механ. 1995. – №6. – С. 16-17.

43. Козлов В.В. О вариационных принципах механики // ПММ. –М.: Наука, 2010. Т. 74. – вып.5. – С. 707-717.

44. Козлов В.В. Замечания о степени неустойчивости // ПММ. –М.: Наука, 2010. Т. 74. – вып.1. – С. 18-21.

45. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с.

46. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Гостехиздат, 1961. –824с.

47. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 532 с.

48. Манглиева Ж.Х. Исследование некоторых задач аналитической динамики систем с неидеальными связями // «Современные техника и технологии горно-металлургической отрасли и пути их развития». Материалы межд. научно-технической конф. – Навои, 2010. –С. 194-195.

49. Манглиева Ж.Х. О комбинировании связей в динамике систем с трением. // Ёш олимлар ва талабаларнинг II-Республика Илмий конференция тезислар тўплами. – ТашГУ, 1996. – С. 99-100.

50. Манглиева Ж.Х. О движении систем, содержащих голономные связи с трением. // Ресурсопроизводящие, малоотходные и природоохранные технологии освоения недр: Материалы четвертой межд. конф. Москва-Навои, 2005. - С. 500-503.

51. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: БХВ – С. Петербург, 2001. – 528 с.

52. Махкамов Э.И. О реализации сервосвязей контактными воздействиями // Науч. тр. ТашГУ. – 1979.- вып. 590 – с. 80-83

53. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

54. Моисеев Н.Н Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1969. – 380 с.

55. Мухаметзянов И.А. К задачам построения уравнений программных движений // Дифф. уравнения. – М.:1973.- №10. – С. 1798-1803.

56. Мухарлямов Р.Г. Построение множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегралы // Дифф. уравнения. – М.: 1967. – №2. – С. 180-192.

57. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. – М.: Наука, 1967. – 519 с.

58. Новоселов В.С. Расширенные уравнения движения нелинейных неголономных систем // Уч. записки ЛГУ. 1957. – № 217. –вып.31. – С. 84-89.

59. Новоселов В.С. Уравнения движения нелинейных неголономных систем со связями, не относящимися к типу Н. Г. Четаева. // Уч. запис. ЛГУ. 1960. – №280. – вып.35. – С. 36-52.

60. Пенлеве П. Лекции о трении. Пер. с франц. – М.: Гостехиздат, 1954. – 316 с.

61. Перегудова О.А. О стабилизации движений неавтономных механических систем // ПММ. – М.: Наука, 2009. Т. 73. – вып.2. – С. 177-189.

62. Пожарицкий Г. К. Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением // ПММ. – М.: Наука, 1961. Т. 25. –вып. 3. – С. 391-406.

63. Пожарицкий Г.К. Об уравнениях движения для систем с неидеальными связями // ПММ. –М.: Наука, 1960. Т. 24. –вып. 3. –С. 458-462.

64. Розенблат Г.М. Равновесия твердого тела на плоскости с анизотропным сухим трением // ПММ. – М.: Наука, 2009. Т. 73. – вып. 2. – С. 204-218.

65. Ройтенберг Я. Н. Управляемые гироскопические системы // Изв. Ан СССР. Механика твердого тела, 1968. –№3. – С.25-30.

66. Рокар И. Неустойчивость в механике, автомобили, самолеты, висячие мосты. – М.: ИЛ, 1959. –287 с.

67. Румянцев В. В. О движении некоторых систем с неидеальными связями // Вест. МГУ. Сер. матем., механика.1961. – №5. – С. 67-75.

68. Румянцев В.В. О вариационных принципах для систем с неудерживающими связями // ПММ. – М.: Наука, 2006. Т.70. –вып. 6. – С. 902-914.

69. Румянцев В.В. О движении управляемых механических систем // ПММ. – М.: Наука, 1976. Т. 40. – вып. 6. – С. 771-781.

70. Румянцев В.В. О системах с трением // ПММ. – М.: Наука, 1961. Т. 25. – вып.6. – С. 969-977.

71. Сидиков М.Н. Об устойчивости установившегося движения регулятора скорости // Узб. журнал «Проблемы механики». – Ташкент, 2002. – № 5. – С.13-16.

72. Сидиков М.Н. Метод комбинирования связей в задаче Пенелеве-Гантмахера // Материалы межд. научно-технической конф. «Современные проблемы механики», книга 2. – Ташкент, 2009. – С. 394-396.

73. Сидиков М.Н., Манглиева Ж.Х. Оптимальная стабилизация движений фрикционного редуктора с условной связью // Узб. журнал «Проблемы механики». – Ташкент, 2007. – №4. – С. 22-25.

74. Сидиков М.Н., Манглиева Ж.Х. Об уравнениях движения систем с трением // Актуальные проблемы механики и машиностроения: Материалы меж. науч. конф. 17-19 июня. 2005. – Алма-Ата, 2005. – С. 123-124.

75. Сидиков М.Н., Манглиева Ж.Х. Уравнения движения системы с неидеальными геометрическими связями в избыточных координатах // Материалы межд. научно-технической конф. «Современные проблемы и перспективы механики». – Ташкент, 2006. – С. 54-55.

76. Сидиков М.Н, Манглиева Ж.Х Некоторые вопросы динамики лобовых регуляторов скорости. // «Современные техника и технологии горно-металлургической отрасли и пути их развития». Материалы межд. научно-технической конф. - Навои, 2010.- С. 208-209.

77. Сидиков М.Н, Манглиева Ж.Х. Об уравнениях движения механических систем в избыточных координатах с трениям. // Межд. научно-практическая конф. "Инновация - 2005". Сборник научных статей. - Ташкент, 2005.- С.189-190.

78. Смирнов Ю.П. Об уравнениях движения механических систем с сухим трением. Теор. механика. Сборник научно – методических статей. – М.: Высшая школа, 1977. – вып.8. – С. 39 – 44.

79. Суслов М.Л. Теоретическая механика. – М.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.

80. Тешаев М.Х. Об одном способе реализации геометрических сервосвязей с помощью электромеханических сил // Проблемы механики. – Ташкент, 1998. – №1. – С. 27-31.

81. Тешаев М.Х. О стабилизации механических систем, стесненных геометрическими связями // Проблемы механики. – Ташкент, 1999. – №1. – С. 17-20.

82. Тешаев М.Х. Об оптимальной стабилизации систем, стесненных геометрическими сервосвязями, на основе метода динамического программирования // Объединенный научный журнал. – Москва, 2007. - №2(190) - С. 59-61.

83. Тураев Х.Т., Фуфаев Н.А., Мусарский Р.А. Теория движения систем с качением. – Ташкент: Фан, 1987. – 158 с.

84. Хусанов К. Расширенные уравнения движения систем с сервосвязями // Управляемые динамические системы и их приложения. Сб. науч. тр. – Ташкент, 1987. – С. 95-99.

85. Четаев Н.Г. О принципе Гаусса // В кн.: Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М.: Изд. АН СССР, 1962. – С.311-316.

86. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М.: Изд. АН СССР, 1962. – 535с.

87. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. – Ташкент, Изд. САГУ, 1958. – 183 с.

88. Юшков М.П. Уравнения движения машинного агрегата с вариатором как неголономной системы с нелинейной связью второго порядка // Мех. тверд. тела. – М., 1997. -№4. -С.40-44.

89. Do Sanh. On a Mechanical system with nonideal constraints // Zagadnienia Drgen Nieliniwych. – 1981. – n. 20. – p. 61-92.

90. Przeborski A. Die allgemeinsten Gleichungen der klassischen Dynamik. – Math. Z., 1932, 36. – №2. – p. 184-194.

91. Qurbonov P., Misirov SH. Analitik mexanikadan masalalar yechish. – Toshkent, 2005. – 160 с.